Wurzelgleichung

Wo quadriert wird ist die Umkehrung auch nicht weit: DAS WURZELZIEHEN.

Dass es auch Gleichungen dazu geben soll, ist gar nicht so unwahrscheinlich – bei der Lösung des Pythagoras kommt die Gleichung c = $\sqrt{a^2 + b^2}$ vor.

Die Lösung der Wurzelgleichung hat gleich mehrere Tücken. Die erste fängt damit an, dass man nicht gleich quadrieren kann, wie das Beispiel zeigt:

Beispiel: Löse die Wurzelgleichung $\sqrt{x+3} + 2 = 0$

Quadriert man gleich los, so ergibt sich: $(\sqrt{x+3} + 2)^2 = 0 \Rightarrow (x+3) + 2\cdot 2\cdot\sqrt{x+3} + 4 = 0$
Wenn man nicht vergisst, dass man eine **binomische Formel** anzuwenden hat.

Damit kommen wir nicht weiter, da schon wieder eine Wurzel da ist, noch dazu die gleiche.

Also müssen wir zuerst die **Wurzel ISOLIEREN:** $\sqrt{x+3} = -2$
Jetzt kann man quadrieren und erhält: $x+3 = 4$
Daraus ergibt sich: $\underline{x = 1}$

Aber das ist nicht die Lösung. Beim Einsetzen der Lösung in die ursprüngliche Gleichung, so gilt: $\sqrt{1+3} + 2 = 4$ und nicht Null!

Wieso ist das passiert?

Quadrieren ist keine Äquivalenzumformung, da aus −2 und aus 2 beim Quadrieren 4 entsteht, umgekehrt ist aber die Wurzel aus 4 nur 2 und nicht −2. Es können also falsche Lösungen entstehen.

Wie kann man das Absichern?

Dazu gibt es zwei Möglichkeiten: Bestimmen einer **Definitionsmenge** und Einsetzen der Lösung in die ursprüngliche Gleichung (**PROBE**)

Beispiel: Gib die Definitionsmenge an und löse die Wurzelgleichung $\sqrt{x+3} + 2 = 0$

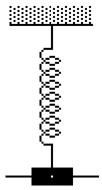
Lösung: Damit die Wurzel ziehbar wird, muss das Innere positiv oder Null sein: $x+3 \geq 0$ und damit muss $x \geq -3$ sein (Definitionsmenge $D = [-3,\infty[$).

In unserm Fall hilft das auch nicht, da $x=1$ sowieso positiv ist. Beim Einsetzen der Lösung in die ursprüngliche Gleichung ergibt sich, dass keine Lösung möglich ist. Also gibt es für die Gleichung keine Lösung, wohl aber für die ähnliche Gleichung, nämlich:
$\sqrt{x+3} - 2 = 0$

Aufgaben:

Lösen Sie die Wurzelgleichung und machen Sie die **Probe** dazu!

1) $2\cdot\sqrt{x} = 4$
2) $\sqrt{4x} = 2$
3) $\sqrt{x+2} - 3 = 0$
4) $\sqrt{6x} - 5 = 1$
5) $4 \cdot \sqrt{3x} - 11 = 1$
6) a) $\sqrt{15-x} + 20 = 0$ b) $\sqrt{15-x} - 20 = 0$
7) $\frac{1}{\sqrt{x}} = 5$
8) $1 - \sqrt{a-3} = 0$
9) $\sqrt{x^2 + 3^2} = 5$
10) $1000 = \frac{1}{\sqrt{0{,}005 \cdot L}}$
11) $t = 2 + \sqrt{t \cdot (t-3)}$
12) $\sqrt{(x+5)(x-3)} + 1 = x$
13) $4\cdot \sqrt{a+3} = 3\cdot\sqrt{10+a}$
14) $5\cdot\sqrt{3x+1} = 3\cdot \sqrt{5x+25}$
15) $\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = 5$
16) Bei der Federschwingung kommt die Gleichung für die Zeitdauer T vor:
$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$ Dabei ist m die Masse des Pendels und k die Federkonstante.
Warum da auch die Kreiszahl π vorkommt mag zwar ein Rätsel sein, zeigt aber die Verwandtschaft der Federbewegung mit der Kreisbewegung. Berechnen Sie k, wenn T = 2 Sekunden und m = 3 kg gegeben ist.



Lösungen:

1) 4
2) 1
3) 7
4) 6
5) 3
6) a) keine Lösung b) -385
7) 1/25
8) 4
9) 4, −4
10) 0,0002
11) 4
12) 4
13) 6
14) 6,666…
15) 523,59…
16) 29,6