UNGLEICHUNGEN

Unterschied zu Gleichungen: Bei Multiplikation oder Division mit negativen Zahlen muss man das Ungleichheitszeichen umdrehen, weil die negativen Zahlen die verkehrte Ordnung haben (-5 ist kleiner als -2, obwohl 5 größer als 2 ist!
– man sagt auch: -5 ist weiter links als -2 am Zahlenstrahl!)

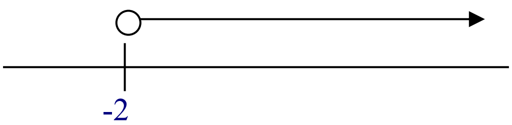
$2 < 5$	$\mid *(-1)$
$-2 > -5$	

Beispiel 1:
Lösen Sie folgende lineare Ungleichung in ℝ rechnerisch und grafisch:
$3(x+5) – (x+3) < 4(x+4)$

Lösung:

$3(x+5) – (x+3) < 4(x+4)$	Ausmultiplizieren
$3x + 15 – x – 3 < 4x + 16$	Gleiches mit Gleichem zusammenfassen
$2x + 12 < 4x + 16$	$\mid -4x$
$-2x +12 < 16$	$\mid -12$
$-2x < 4$	$\mid : (-2)$!!!
$\boxed{x > -2}$	

grafische Lösung:



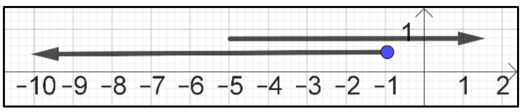
Lösung: L = {x∈ℜ| x > −2} =]−2;∞[

Beispiel 2:
Lösen Sie folgende lineare Ungleichungskette in ℝ rechnerisch:
$2x + 6 \leq 1 - 3x < x + 21$

Lösung:
Teilen wir das zuerst in 2 Ungleichungen auf:

$2x + 6 \leq 1 - 3x$	$\mid +3x -6$	$1 - 3x < x + 20$	$\mid +3x -21$
$5x \leq -5$	$\mid :5$	$-20 < 4x$	$\mid :4$
$x \leq -1$		$-5 < x$	
		$x > -5$	

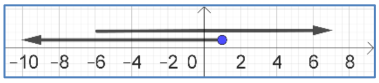
Lösung: L = {x∈ℝ | −5 < x ≤ −1} =]−5; −1]



Beispiel 3:
Lösen Sie folgendes Ungleichungssystem in $\mathbb{R}$: $2x + 5 > -7$ und $5x + 2 \le 7$

Lösung:

$2x + 5 > -7$	$\mid -5$	$5x + 2 \le 7$	$\mid +2$
$2x \quad > -12$	$\mid :2$	$5x \quad \le 5$	$\mid :5$
$x \quad > -6$		$x \le 1$	

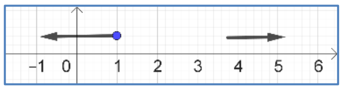


Lösung: L = $\{x\in\mathbb{R} \mid -6 < x \le 1\}$ = $]-6; 1]$

Beispiel 4:
Lösen Sie folgendes Ungleichungssystem in $\mathbb{R}$: $4x - 3 > 12$ und $5x + 2 \le 7$

Lösung:

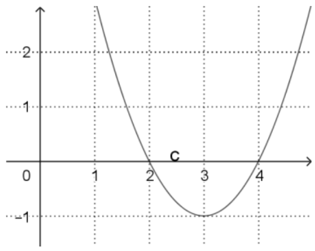
$4x - 3 > 12$	$\mid +3$	$5x + 2 \le 7$	$\mid +2$
$4x \quad > 15$	$\mid :4$	$5x \quad \le 5$	$\mid :5$
$x \quad > 3{,}75$		$x \le 1$	



Lösung: L = { }

Beispiel 5:
Lösen Sie folgende quadratische Ungleichung in $\mathbb{R}$: $x^2-6x > -8$

Lösung:
Bringt man die rechte Seite nach links, so ergibt sich die quadratische Funktion $y = x^2-6x+8$, die größer als Null sein soll.
Also löst man zuerst die quadratische Gleichung $x^2-6x+8 = 0$ und daraus schließt man auf die Ungleichung:
$x^2-6x+8=0$ ➔ $x_{1,2} = +3 \pm \sqrt{3^2-8}$ ➔ $x_1 = 2$ und $x_2 = 4$
das sieht grafisch dann so aus ➔



Größer als Null ist die Funktion dann bei $x<2$ und bei $x>4$
$L = \{x\in\mathbb{R} \mid x<2 \text{ oder } x>4\} =]-\infty;2] \cup]4;\infty[$

Übungen:

1) Lösen Sie folgende Ungleichungen über der Grundmenge $\mathbb{R}$

a) $2x-7 < x+2$ b) $3x+4 > x+2$ c) $4x+5 > 6x+3$

d) $2(x-3)+5(2-x) > 3x+2$ e) $4(x+2) - 3(2x-5) < 2(x+11)$ f) $(x-2)^2 + 5 > (x-3)^2$

2) Lösen Sie folgende Ungleichungen in $\mathbb{R}$:

a) $(x+2)(x-4) < 10x+(x+2)(x+1)$ b) $(2x-5)(3x+2) < (x+5)(6x-6)+15$

c) $(2x+2)/2 + (x-4)/3 < (5x-8)/3$ d) $(2x-1)/5 + (4x-5)/2 > (3x-9)/2$

3) Lösen Sie folgende Ungleichungssysteme rechnerisch und grafisch über der Grundmenge $\mathbb{R}$ und geben Sie die Lösung als Menge oder Intervall an:

a) $4x-3 > x+6$ **und** $5x+3 > -x-9$ b) $3x-3 < 2x+3$ **und** $-x+5 \geq -2x+7$

c) $x/2+5 < 3$ **und** $x/3-9 > x/2$ d) $x+1 < x+2$ **und** $4x+5 \geq x/2-2$

e) $2x+5 \geq x+3$ **und** $3x+2 > 4x-3$ f) $x-5 < 2x-3$ **und** $3x-8 \geq 2x-3$

4) Lösen Sie die Ungleichungskette rechnerisch und grafisch über der Grundmenge $\mathbb{R}$ und geben Sie die Lösung als Menge oder Intervall an:

a) $x-5 < 2x \leq x+6$ b) $3x-5 \leq 4x+2 < x-5$

c) $2x-6 \leq 3x-2 \leq 2x$ d) $3x+6 < 4x+2 \leq 3x+14$

5) Lösen Sie die quadratische Ungleichung in $\mathbb{R}$:

a) $x^2 -5x > 0$ b) $x^2 -x -2 > 0$

c) $x^2 +3x < 0$ d) $x^2 - 5x < -6$

e) $3x^2 -10x +3 \geq 0$ f) $(x+4)(x-4) \geq 9$

g) $(x+2)(x-5) \leq 4(x+2)$ h) $5x^2 + 4x < 1$

6) Das Doppelte einer Zahl x ist größer als 22. Gib das Ergebnis als Ungleichung an!

Lösungen:

Nr.	Lösung	in **IR**
1a)	$x < 9$	$]-\infty; 9[$
1b)	$x > -1$	$]-1; \infty[$
1c)	$x < 1$	$]-\infty; 1[$
1d)	$x < 1/3$	$]-\infty; 1/3[$
1e)	$x > 1/4$	$]1/4; \infty[$
1f)	$x > 0$	$]0; \infty[$

2) a) $x > -2/3$ b) $x > 1/7$ c) $x > 7$ d) $x > -2$

3) a) $x>3$ (und $x>-2$) b) $2 \leq x < 6$ c) $x < -54$ (und $x<-4$)

d) $x \geq -2$ (und wahre Aussage) e) $-2 \leq x < 5$ f) $x\geq 5$ (und $x>-2$)

4) a) $-5 < x \leq 6$ b) $-7 \leq x < -7/3$ c) $-4 \leq x \leq 2$ d) $4 < x \leq 12$

5) a) $]-\infty;0[\cup]5;\infty[$ b) $]-\infty;-1[\cup]2;\infty[$ c) $]-3;0[$ d) $]2;3[$

e) $]-\infty;1/3] \cup [3; \infty[$ f) $]-\infty;-5] \cup [5; \infty[$ g) $[-2;9]$ h) $]-1;1/5[$

6) $2x > 22$ ➔ $x > 11$