

UNGLEICHUNGEN

Unterschied zu Gleichungen: Bei Multiplikation oder Division mit negativen Zahlen muss man das Ungleichheitszeichen umdrehen, weil die negativen Zahlen die verkehrte Ordnung haben (-5 ist kleiner als -2, obwohl 5 größer als 2 ist! – man sagt auch: -5 ist weiter links als -2 am Zahlenstrahl!)

$2 < 5$	$\cdot (-1)$
$-2 > -5$	

Beispiel 1:

Lösen Sie folgende lineare Ungleichung in \mathbf{N} , \mathbf{Z} und \mathbf{R} rechnerisch und grafisch:

$$3(x+5) - (x+3) < 4(x+4)$$

Lösung:

$$3(x+5) - (x+3) < 4(x+4)$$

$$3x + 15 - x - 3 < 4x + 16$$

$$2x + 12 < 4x + 16$$

$$-2x + 12 < 16$$

$$-2x < 4$$

$x > -2$

Ausmultiplizieren

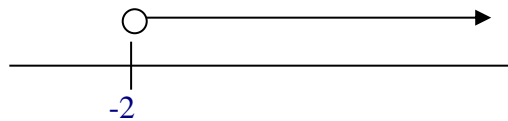
Gleiches mit Gleichem zusammenfassen

$$|-4x$$

$$|-12$$

$$| : (-2) !!!$$

grafische Lösung:



rechnerische Lösung:

Grundmenge	\mathbf{N}	\mathbf{Z}	\mathbf{R}
Lösungsmenge	$\{0,1,2,3,\dots\}$	$\{-1,0,1,2,3,\dots\}$	$\{x \in \mathbf{R} \mid x > -2\} =]-2; \infty[$

Beispiel 2:

Lösen Sie folgende lineare Ungleichungskette in \mathbf{R} rechnerisch und grafisch mit Hilfe einer Funktion:

$$4 \leq 1-3x < 7$$

Lösung:

$$4 \leq 1-3x < 7 \quad | -1$$

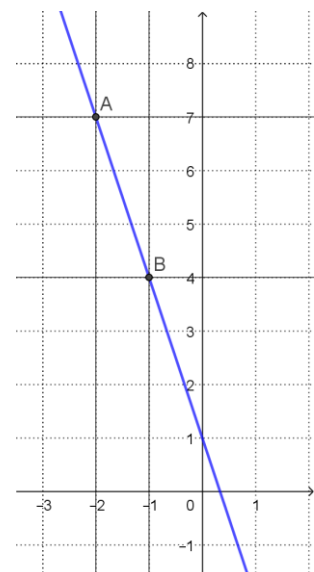
$$3 \leq -3x < 6 \quad | : (-3) !!!$$

$$-1 \geq x > -2 \quad | \text{Ungleichung umdrehen}$$

$$-2 < x \leq -1$$

daraus folgt die Lösungsmenge: $L = \{x \in \mathbf{R} \mid -2 < x \leq -1\} =]-2; -1]$

grafische Lösung mit Funktion: $y = 1-3x$ und den waagrechten Grenzen 4 und 7 ergibt senkrecht dazu die Lösungen -1 und -2



Beispiel 3:Lösen Sie folgende Ungleichung mit Betrag in \mathbb{R} : $|1-3x| < 4$ **Lösung:**

Auftrennen in eine Ungleichungskette:

$$\begin{array}{rcl} -4 < 1-3x < 4 & | -1 & \\ -5 < -3x < 3 & | : (-3) & \\ 5/3 > x > -1 & & \end{array}$$

Lösung: $L = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 5/3\} =]-1; 5/3[$ **Beispiel 4:**Lösen Sie folgende quadratische Ungleichung in \mathbb{R} : $x^2-6x > -8$ **Lösung:**

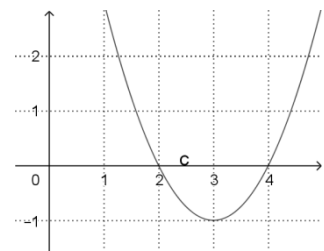
Bringt man die rechte Seite nach links, so ergibt sich die quadratische Funktion $y=x^2-6x+8$, die größer als Null sein soll. Also löst man zuerst die quadratische Gleichung $x^2-6x+8=0$ und daraus schließt man auf die Ungleichung:

$$x^2-6x+8=0 \rightarrow x_{1,2} = +3 \pm \sqrt{3^2-8} \rightarrow x_1 = 2 \text{ und } x_2 = 4$$

das sieht grafisch dann so aus \rightarrow

Größer als Null ist die Funktion dann bei $x < 2$ und bei $x > 4$

$$L = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \vee x > 4\} =]-\infty; 2[\cup]4; \infty[$$

**Beispiel 5:**Lösen Sie rechnerisch und grafisch folgende Bruch-Ungleichung in \mathbb{R} : $\frac{x}{2x-1} < 1$ **Lösung:**

Hier muss man den Nenner beachten. Da hier x dabei ist, ist es wichtig zu wissen, ob der Nenner kleiner gleich oder größer als Null ist. Gleichheit ist verboten, weil durch Null dividieren verboten ist. Es bleibt also nichts anderes übrig als zwei Fälle zu unterscheiden:

$$\begin{array}{ll} \text{Fall a) Nenner positiv: } 2x-1 > 0 & | +1 | :2 \\ \rightarrow \boxed{x > 1/2} & \text{Fall b) Nenner negativ: } 2x-1 < 0 & | +1 | :2 \\ & \rightarrow \boxed{x < 1/2} \end{array}$$

dann kann man mit dem Nenner multiplizieren

ohne Ungleichheitszeichen umzudrehen

$$\begin{array}{rcl} \frac{x}{2x-1} < 1 & |*(2x-1) & \\ x < 2x-1 & | -2x & \\ -x < -1 & |*(-1) & \\ \boxed{x > 1} & & \end{array}$$

mit Umdrehen

$$\begin{array}{rcl} \frac{x}{2x-1} < 1 & |*(2x-1) & \\ x > 2x-1 & | -2x & \\ -x > -1 & |*(-1) & \\ \boxed{x < 1} & & \end{array}$$

Nun muss man sowohl die jeweilige Anfangsbedingung als auch das jeweilige Resultat der Ungleichungsumformung mit **und** zusammenfassen:

$$x > 1/2 \text{ und } x > 1$$

$$x < 1/2 \text{ und } x < 1$$

ergibt

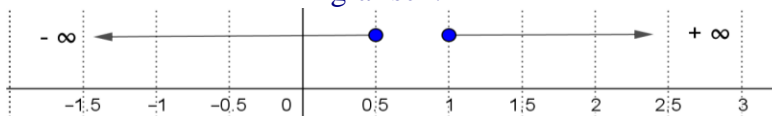
$$x > 1$$

$$x < 1/2$$

Diese beiden Bedingungen werden mit **ODER** verbunden!

$$\text{Lösung: } x < 1/2 \text{ oder } x > 1$$

grafisch:



Übungen:

- 1) Lösen Sie folgende Ungleichungen über den Grundmengen **N**, **Z** und **R**
- a) $2x-7 < x+2$ b) $3x+4 > x+2$ c) $4x+5 > 6x+3$
d) $2(x-3)+5(2-x) > 3x+2$ e) $4(x+2) - 3(2x-5) < 2(x+11)$ f) $(x-2)^2 + 5 > (x-3)^2$
- 2) Lösen Sie folgende Ungleichungen in **R**:
- a) $(x+2)(x-4) < 10x+(x+2)(x+1)$ b) $(2x-5)(3x+2) < (x+5)(6x-6)+15$
c) $(2x+2)/2 + (x-4)/3 < (5x-8)/3$ d) $(2x-1)/5 + (4x-5)/2 > (3x-9)/2$
- 3) Lösen Sie folgende Ungleichungssysteme rechnerisch und grafisch über der Grundmenge **R** und geben Sie die Lösung als Menge oder Intervall an:
- a) $-5 < x \leq 6$ b) $3x-5 \leq 4x+2 < x-5$
c) $x/2+5 < 3$ **und** $x/3-9 > x/2$ d) $x+1 < x+2$ **und** $4x+5 \geq x/2-2$
- 4) Lösen Sie die Betragsungleichungen in **R**:
- a) $|x-7| < 2$ b) $|x-5| \leq 1$ c) $|x+4| < 3$ d) $|3x-8| < 14$
- 5) Lösen Sie die quadratische Ungleichung in **R**:
- a) $x^2 - 5x > 0$ b) $x^2 - x - 2 > 0$
c) $x^2 + 3x < 0$ d) $x^2 - 5x < -6$
- 6) Lösen Sie die Bruch-Ungleichung in **R**:
- a) $\frac{1}{x+2} \leq \frac{1}{8}$ b) $\frac{x-5}{x+2} > -1$ c) $\frac{x}{1-x} \geq 4$
d) $\frac{4x-1}{x} < 6$ e) $\frac{x+4}{x-3} \leq -2$ f) $\frac{-1}{x-3} > -\frac{1}{2}$

Lösungen:

Nr.	Lösung	in IN	in Z	in IR
1a)	$x < 9$	$\{0,1,2,\dots,8\}$	$\{\dots,-5,-4,\dots,8\}$	$] -\infty; 9[$
1b)	$x > -1$	IN	IN	$] -1; \infty[$
1c)	$x < 1$	$\{0\}$	$\{\dots,-3,-2,-1,0\}$	$] -\infty; 1[$
1d)	$x < 1/3$	$\{0\}$	$\{\dots,-3,-2,-1,0\}$	$] -\infty; 1/3[$
1e)	$x > 1/4$	$\{1,2,3,\dots\}$	$\{1,2,3,\dots\}$	$] 1/4; \infty[$
1f)	$x > 0$	$\{1,2,3,\dots\}$	$\{1,2,3,\dots\}$	$] 0; \infty[$

- 2) a) $x > -2/3$ b) $x > 1/7$ c) $x > 7$ d) $x > -2$
- 3) a) $-5 < x \leq 6$ b) $-7 \leq x < -7/3$ c) $x < -54$ d) $x \geq -2$
- 4) a) $5 < x < 9$ b) $4 \leq x \leq 6$ c) $-7 < x < -1$ d) $-3 \leq x \leq 11$
- 5) a) $] -\infty; 0[$ u $] 5; \infty[$ b) $] -\infty; -1[$ u $] 2; \infty[$
c) $] -3; 0[$ d) $] 2; 3[$
- 6) a) $x \geq 6$ oder $x < -2$ b) $x > 3/2$ oder $x < -2$
c) $1 < x \leq 4/5$ d) $0 < x < 7/4$
e) $2/3 \leq x < 3$ f) $x > 5$ oder $x < 3$