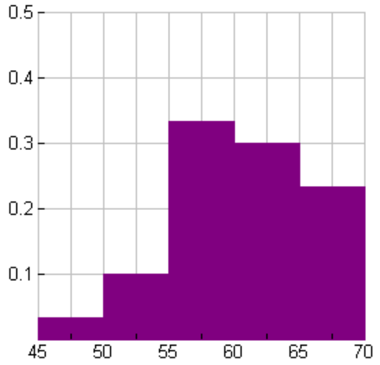
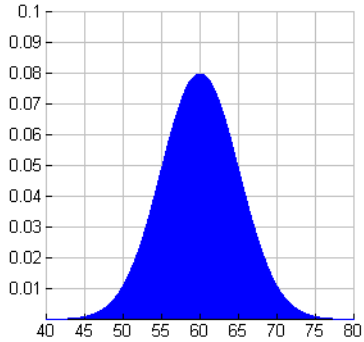
Dr. Manfred Gurtner 2003

Normalverteilung



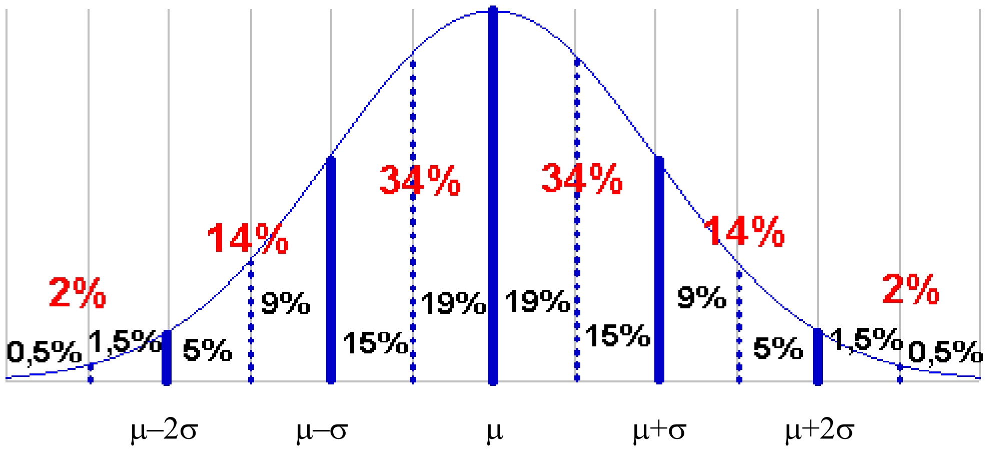
Wie im Kapitel Statistik zu sehen war, gibt es die Möglichkeit der Darstellung von Verteilungen mit Hilfe des Histogramms – wie links zu sehen an der **Gewichtsverteilung von Hühnereiern** (bei 30 Eiern).

Wenn man nun die Zahl der untersuchten Eier erhöht und erhöht, so wird sich in den meisten Fällen die Verteilung zur **Normalverteilung** (rechtes Bild) hin entwickeln.



Das **Gesetz der großen Zahlen** besagt, dass jede Verteilung sich bei großer Teilnehmerzahl zur Normalverteilung hin entwickelt.
Darum ist diese Verteilung so wichtig und wir wollen uns mit der grafischen Darstellung und Auswertung beschäftigen. (Die rechnerische Auswertung kann nur mit Tabellen oder Algebraprogrammen berechnet werden – und wird hier nicht berücksichtigt.)

Die **<u>Normalverteilung</u>** lässt sich <u>ungefähr</u> (auf 1% genau) folgendermaßen zeichnen:
(Wahrscheinlichkeiten sind als Flächen sichtbar)



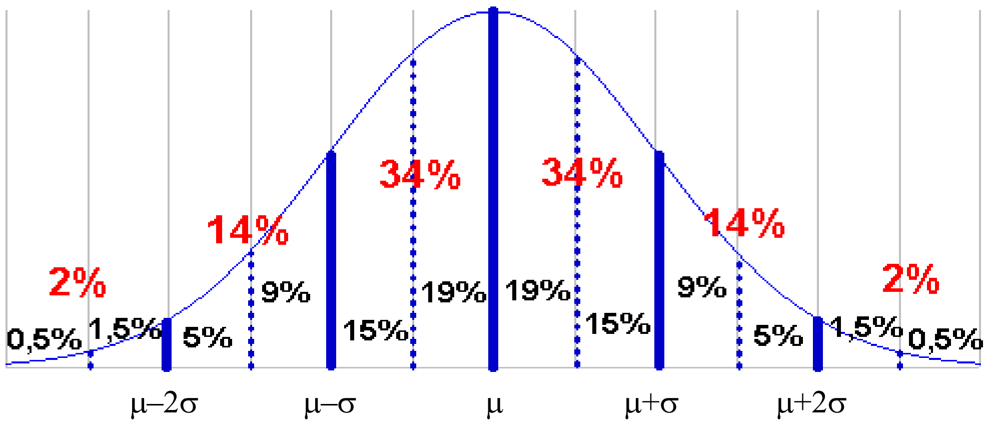
Die Spitze des Berges liegt über der Stelle des Mittelwerts μ. Die Entfernung vom Mittelwert nach links und rechts zu den Wendepunkten der Kurve entspricht der Standardabweichung σ.
Die Wahrscheinlichkeit, dass ein x-Wert zwischen μ und $\mu+\sigma$ liegt, ist ca. 34%.
Die Wahrscheinlichkeit, dass ein x-Wert zwischen $\mu+\sigma$ und $\mu+2\sigma$ liegt, ist ca. 14%.
Die Wahrscheinlichkeit, dass ein x-Wert größer als $\mu+2\sigma$ ist, ist ca. 2%.
Genaueres sieht man aus der Zeichnung.

Wenn man wissen will, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass der x-Wert zwischen $\mu-2\sigma$ und $\mu+\sigma$ liegt, muss man nur noch die Wahrscheinlichkeiten addieren: 14 + 34 + 34 = 82%

Wenn man andererseits weiß, dass die Wahrscheinlichkeit der x-Werte, die kleiner als x_0 sind, bei 16% liegt, dann muss $x_0 = \mu-\sigma$ sein

Beispiel:
Die Verteilung der Körpergröße von Frauen sei gegeben durch den Mittelwert μ = 170 cm und die Standardabweichung σ = 10 cm.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit eine Frau zu treffen deren Körpergröße
a) zwischen 170 und 175 cm
b) zwischen 175 und 180 cm
c) zwischen 180 und 185 cm
d) zwischen 185 und 190 cm
e) größer als 190 cm ist

Lösung:



Die Normalverteilung der Frauen ist durch einen Berg mit der größten Höhe in x=170 (μ=m) zu zeichnen, die Entfernung zum linken und rechten Wendepunkt der Kurve beträgt σ = s = 10.
a) Die Wahrscheinlichkeit beträgt ca. 19%
b) Die Wahrscheinlichkeit beträgt ca. 15%
c) Die Wahrscheinlichkeit beträgt ca. 9%
d) Die Wahrscheinlichkeit beträgt ca. 5%
e) Die Wahrscheinlichkeit beträgt ca. 2%

Übungen:
1) Eine Abfüllanlage ist auf eine Abfüllmenge von 1000 g eingestellt. Durchschnittliche Abweichung davon ist 5 g. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Abfüllmenge
a) höchstens 1010 g beträgt? b) mindestens 990 g beträgt?
c) zwischen 995 und 1010 g beträgt? c) zwischen 1000 und 1010 g beträgt?

2) Eine bestimmte Bevölkerungsschicht hat einen IQ (Intelligenzquotient), der normalverteilt ist mit μ=100 und σ=15. Um einen Führungsjob zu erhalten, soll ein IQ von mehr als 122,5 erreicht werden.
a) Wie viel % der Bevölkerung sind für den Job geeignet?
b) In welchem Bereich [$\mu-\varepsilon$; $\mu+\varepsilon$] um den Mittelwert liegt der IQ von 68% der Bevölkerung?
c) Wie hoch muss Ihr IQ mindestens sein, um zu den 7% der intelligentesten Personen zu gehören?

3) Die Masse von Schokoladeeiern sei normalverteilt mit einem Durchschnittswert von 50 Gramm. Die Standardabweichung ist 1,5 Gramm.
a) Wie viel % der Eier hat eine Masse von mehr als 51,5 Gramm?
b) Eier mit weniger als 48,5 Gramm haben mindere Qualität. Wie viel % der Eier hat mindere Qualität?
c) Berechnen Sie die Masse, die nur von 7 % der Eier überschritten wird.
d) In welchem Intervall um den Mittelwert liegt die Masse von 96 % aller Eier?

4) Eine Maschine produziert täglich 10000 Tafeln Vollmilchschokolade. Dabei ist die Maschine so eingestellt, dass der Mittelwert der Masse einer Schokotafel $\mu = 104$ g beträgt. Die Streuung der Masse beträgt $\sigma = 2$ g und die Masse der Schokotafeln sei normalverteilt.
a) Schokotafeln mit weniger als 100 g Masse werden aussortiert. Wie groß ist die Zahl der aussortierten Tafeln bei einer hergestellten Menge von 10000 Stück täglich? Wie viele Schokotafeln können somit täglich verkauft werden?
b) Ca.. 2 % der täglich produzierten Schokotafeln haben eine zu geringe Masse und werden aussortiert. Wie viele Schokotafeln muss die Maschine täglich mindestens produzieren, wenn täglich genau 10000 Schokotafeln verkauft werden sollen?
c) In welchem Intervall $[\mu - \varepsilon; \mu + \varepsilon]$ liegt die Masse von 99 % der Schokotafeln?
d) Wie viele Schokotafeln haben eine Masse von mehr als 108 g? (10000 Stück werden hergestellt.)
e) Wie hoch müsste die Masse einer Schokotafel sein, wenn Sie zu den 7 % der produzierten Schokotafeln mit der größten Masse gehören soll?

5) Von einer Maschine werden Eisenplatten hergestellt. Die Dicke der Platten sei normalverteilt. Der Erwartungswert ist 12 mm, die Standardabweichung 0,03 mm. Berechnen Sie, wie viel % **Ausschuss** zu erwarten sind, wenn die Platten
a) mindestens 11,97 mm,
b) höchstens 12,06 mm stark sein sollen,
c) höchstens um 0,03 mm vom Erwartungswert abweichen dürfen.
d) Wie sind die Toleranzgrenzen festzulegen, damit höchstens 4 % Ausschuss erhalten wird?

6) Die Brenndauer von Glühlampen ist normalverteilt mit dem Erwartungswert 1500 Stunden und einer Standardabweichung von 100 Stunden.
a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt die Brenndauer einer Glühlampe über 1500 Stunden?
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt die Brenndauer einer Glühlampe zwischen 1300 und 1700 Stunden?
c) Glühlampen mit einer Brenndauer von unter 1 000 Stunden sind Ausschuss. Wie viel % beträgt der Ausschuss?
d) Für welches Intervall $[1\,500 - \varepsilon; 1500 + \varepsilon]$ liegt die Brenndauer einer Glühlampe zu 86 % innerhalb der Intervallsgrenzen?
e) Glühlampen mit einer Brenndauer unter b Stunden gelten als Ausschuss. Wie groß ist b, wenn der Ausschussanteil 7 % der Produktion betragen darf!

7) Die erreichbaren Punktezahlen bei einer Prüfung waren 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10. Die mittlere Punktezahl ist 6,8 und die Standardabweichung 1,2. Die Punktezahlen sind näherungsweise normalverteilt.
a) Wie viel Prozent der Studenten erhielten höchstens 5 Punkte?
b) Wie groß ist die höchste Punktezahl der schlechtesten 16%?
c) Wie groß ist die niedrigste Punktezahl der 7% Besten?

Lösungen:

1) 98% 98% 82% 48%
2) 7% [85; 115] 122,5
3) 16% 16% 52,25g [47; 53]
4a) 2% 200 9800 b) 10204 c) [99, 109] d) 200 e) 107 g
5) 16% 2% 32% [11,94; 12,06]
6) 50% 96% 0,00003% (sehr klein) [1350-1650] 1350
7) 7% 5,6 8,6