Was ist der Logarithmus ?

Links: http://www.mathe-online.at/mathint/log/i.html#Exponentialfunktionen
http://www.mathe-online.at/galerie/log/log.html
http://de.wikipedia.org/wiki/Logarithmus

Der L**o**garithmus ist einfach die H**o**chzahl einer Potenz:

Der 2-erLogarithmus von 2^3 ist 3 (die Hochzahl von 2^3 zur Basis 2 ist 3): $log_2\,(2^3) = 3$
Der 10-er Logarithmus von 10^6 ist 6 (die Hochzahl von 10^6 zur Basis 10 ist 6): $log_{10}\,(10^6) = 6$

$log_2\, 2 = log_2\, 2^1 = 1$
$log_2\, 4 = log_2\, 2^2 = 2$
$log_2\, 8 = log_2\, 2^3 = 3$
....

Das ist also ganz simpel, schwer wird es bei der Verallgemeinerung dieses Vorgangs: Was ist mit den Zahlen dazwischen?

zum Beispiel ist: $log_2 \sqrt{2} = log_2\, 2^{1/2} = ½$

Was ist $log_2\, 5$ =?

→ Irgendein Zwischenwert zwischen 2 und 3 muss es sein, weil $2^2 = 4$ und $2^3 = 8$ ist!

Die Mathematik hat sich darauf geeinigt, dass man nicht beliebige Logarithmen berechnet, sondern bloß 10-Logarithmen (**lg**) und „Natürliche“ Logarithmen (**ln**) zur Basis e (=2,71828...) (siehe auch: http://de.wikipedia.org/wiki/Eulersche_Zahl). Beide findet man am Taschenrechner (**lg** als log und **ln** als ln). Alle anderen lassen sich durch einfache Division durch einen Faktor berechnen:

$$log_a\, \mathbf{x} = \frac{\lg x}{\lg a} = \boxed{\frac{\log Zahl}{\log Basis}}$$

z.B.: $log_2\, 5 = \frac{\lg(5)}{\lg(2)} = \frac{0{,}6989...}{0{,}301...} = 2{,}3219...$

Wozu braucht man den Logarithmus?

Bis 1970 gab es keine Taschenrechner. Wie haben die Leute damals so simple Sachen, wie 120450 * 493 gerechnet?
Man glaubt es kaum – die meisten haben es **händisch** ausgerechnet. Beim Verkauf von Eisenwaren gab es **mechanische** Rechner, die man kurbeln musste. Es gab **elektrische** Rechner, die mit Motor und viel Getöse die Rechnungen machten.
Für astronomische Berechnungen, die ja auch auf 5-6 Stellen genau sein mussten, aber nicht auf „Heller und Cent“ genau, gab es **Logarithmentabellen**, die auch in der Schule genutzt wurden – neben dem **Rechenschieber**, der auch auf der logarithmischen Skala beruht.

Wie wurde gerechnet?

Wenn man rechnen will: **1457 * 846** so musste man zuerst die Logarithmen davon nachblättern:
lg(1457) = 3,16346 (*3 ist selber auszurechnen gewesen (10^3=1000 !)*)
lg(846) = 2,92737 (*2 ist selber auszurechnen gewesen (10^2=100 !)*)

Summe = 6,09083 *(wurde händisch berechnet!)*

in der Tabelle nachgeschaut: 0,09083 heißt 1,23262 und 6 heißt 6 Stellen verschieben- ergibt: 1232620
jetzt kann man noch die Einerstelle kontrollieren, 7*6 =42, also müsste eine 2 dort stehen: **1232622**

Welche Gesetzte stehen dahinter?

Mit $a = 10^{lg(a)}$ und $b = 10^{lg(b)}$ gilt: $\boxed{lg(a \cdot b) = lg(a) + lg(b)}$ weil: $10^{lg(a)} \cdot 10^{lg(b)} = 10^{lg(a) + lg(b)}$

$\boxed{lg(\frac{a}{b}) = lg(a) - lg(b)}$ weil: $10^{lg(a)} / 10^{lg(b)} = 10^{lg(a) - lg(b)}$

$\boxed{lg(a^n) = n \cdot lg(a)}$ weil: $(10^{lg(a)})^n = 10^{lg(a) \cdot n}$

Umwandlungsformel: $\boxed{a^n = b \Leftrightarrow n = log_a b \Leftrightarrow n = \frac{\log b}{\log a} \Leftrightarrow n \cdot \log a = \log b}$

Beispiel: Berechnen Sie:

a) log_2 32, log_{10} 1000, log_5 125 durch Potenzdarstellung der Zahl

b) lg 100, ln 100 mit dem Taschenrechner

c) log_5 10, log_2 20, log_{16} 100 mit dem Taschenrechner und der Umrechnungsformel

d) log(a·b·c), $\log(\frac{a \cdot x}{y})$, $\log(\frac{a \cdot c^6}{b^2})$ als Summe von Einzellogarithmen

e) Lösen Sie die Gleichung nach x auf: $2 \cdot 5^x = 111{,}8$

Lösung:

a) $log_2 32 = log_2 2^5 = \mathbf{5}$, $log_{10} 1000 = log_{10} 10^3 = \mathbf{3}$, $log_5 125 = log_5 5^3 = \mathbf{3}$

b) lg 100 = **2**, ln 100 = **4,61**

c) log_5 10 = lg10 / lg5 = **1,43** log_2 20 = ln(20)/ln(2) = **4,32** log_{16} 100 = lg100/lg16 = **1,66**

d) log(a·b·c) = **log(a) + log(b) + log(c)** $\log(\frac{a \cdot x}{y})$ = log(a·x) – log (y) = **log(a) + log(x) – log(y)**

$\log(\frac{a \cdot c^6}{b^2}) = \log(a \cdot c^6) - \log(b^2) = \log(a) + \log(c^6) - \log(b^2) = \mathbf{\log(a) + 6 \cdot \log(c) - 2 \cdot \log(b)}$

e) $2 \cdot 5^x = 111{,}8$ | durch 2 dividieren
$5^x = 55{,}9$ | logarithmieren
$\log(5^x) = \log(55{,}9)$ | vereinfachen mit dem Logarithmengesetz $lg(a^n) = n \cdot lg(a)$
$x \cdot \log 5 = \log 55{,}9$ | dividieren durch log 5
$x = \frac{\log 55{,}9}{\log 5} = \frac{1{,}7474}{0{,}6989} = \mathbf{2{,}5}$

Übungen:

1) Berechnen Sie die Logarithmen, indem Sie die Zahlen in die Potenzform bringen:

a) log_2 16 =	b) log_2 128 =	c) log_2 1024 =
d) log_{10} 100 =	e) log_{10} 10 000 =	f) log_{10} 0,01 =
g) log_3 81 =	h) $log_3 \frac{1}{9}$ =	i) $log_3 \sqrt{3}$ =
k) log_8 1 =	l) log_8 64 =	m) $log_8 \frac{1}{8}$ =

2) Berechnen Sie die Logarithmen mit der log Zahl / log Basis – Formel auf 4 Stellen genau:

a) lg 3 =	b) lg 30 =	c) ln 2,71 =
d) log_2 10 =	e) log_2 100 =	f) log_2 26 =
g) log_3 2187 =	h) log_5 3125 =	i) log_{16} 100 =

3) Zerlegen Sie die Ausdrücke in eine Summe von Einzellogarithmen:

a) $\log(a \cdot b \cdot c^3)$

b) $\log(x^2 \cdot y)$

c) $\log(\frac{x}{y^2})$

d) $\log(x \cdot \frac{y^2}{x^3})$

e) $\log(x^4 z / a^3)$

f) $\log(5a^3 / bc^4)$

g) $\log(ab^3c^2 / 5x^3y)$

h) $\log(a \cdot \sqrt{b})$

i) $\log(\sqrt[3]{r} \cdot \frac{s}{t})$

4) Lösen Sie die Gleichungen:

a) $3^x = 7$
b) $5^x = 9$
c) $8{,}5^x = 170$
d) $6^{x-2} = 529$
e) $10^{-8x} = 0{,}025$
f) $2^{2x+1} = 400$
g) $0{,}25^{2x-1} = 8$
h) $16^{5x} = 65\,536$

5) Lösen Sie die Gleichungen:

a) $3 \cdot 2^x = 48$
b) $100 \cdot 1{,}05^x = 134$
c) $6 \cdot 3^{x+1} = 486$
d) $4 \cdot 5^{2x} = 24$
e) $2000 \cdot 1{,}1^x = 13455$
f) $10^{3x-2} = 210$
g) $6 \cdot e^x = 890$
h) $10 - e^{3x} = 7{,}54$

6*) Lösen Sie die Gleichungen:

a) $2^{3x} = 6^{2x}$
b) $4^{5x+1} = 3^{2x}$
c) $10^{7x-1} = 4^{2x}$
d) $6^{4-x} = 12^{x+1}$
e) $6^{4x+2} = 8^{7x} \cdot 5^{2x}$
f) $8^{x+1} \cdot 5^x = 10^x$

7) In der Chemie gibt es den PH-Wert von Flüssigkeiten. Definiert ist er als „negativer Logarithmus der Hydroniumionen-Konzentration“. Was bedeutet das? – siehe folgende Tabelle:

Konzentration in mol/Liter	10^{-7}	10^{-8}	10^{-12}	10^{-6}	10^{-2}	$5 \cdot 10^{-4}$	$10^{-0,5} = 0,316$
PH-Wert	7	8	12	6	2	$-\log(5 \cdot 10^{-4}) = 3,3$	0,5

Die Formel lautet: PH = – log(Konzentration)
Ergänzen Sie die folgende Tabelle:

Konzentration in mol/Liter	10^{-9}		$6 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-9}$		0,0001		$4 \cdot 10^{7}$
PH-Wert		13			4,6		9,5	

8) Lärm wird in deziBel (dB) bzw. Phon gemessen. Dabei gilt der Zusammenhang:
db = 20•log(Schalldruck/ 0,00002), wobei der minimale Schalldruck (0,00002 Pascal) im Nenner steht.
Ergänzen Sie die Tabelle:

Schalldruck in Pascal	0,002	0,0002		0,2		8		20
dB-Wert	40		100		110		3	

<u>Lösungen:</u>

1)

log_2 16 = 4	log_2 128 = 7	log_2 1024 = 10
log_{10} 100 = 2	log_{10} 10 000 = 4	log_{10} 0,01 = –2
$log_3 81 = 4$	$log_3 \frac{1}{9} = -2$	$log_3 \sqrt{3} = ½$
log_8 1 = 0	log_8 64 = 2	$log_8 \frac{1}{8} = -1$

2)

lg 3 = 0,4771	lg 30 = 1,4771	ln 2,71 = 0,9969
log_2 10 = 3,3219	log_2 100 = 6,6439	log_2 26 = 4,7004
log_3 2187 = 7	log_5 3125 = 5	log_{16} 100 = 1,6610

3) a) log a + log b + 3•log c b) 2•log x + log y c) log x – 2•log y
d) log x + 2•log y – 3•log z e) 4•log x + log z – 3•log a f) log 5 + 3•log a – log b – 4•log c
g) log a + 3 log b + 2•log c – log 5 – 3•log x – log y
h) log a + ½ • log b i) 1/3• log r + log s – log t

4) a) 1,77 b) 1,37 c) 2,40 d) 5,50 e) 0,20 f) 3,82 g) –0,25 h) 0,8
5) a) 4 b) 6,00 c) 3 d) 0,56 e) 20 f) 1,44 g) 5,00 h) 0,30
6) a) 0 b) –0,29 c) 0,17 d) 1,09 e) 0,338 f) –1,5

7) Konzentration in mol/Liter	10^{-9}	10^{-13}	$6 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-9}$	0,000025	0,0001	$3 \cdot 10^{-10}$	$4 \cdot 10^{-7}$
PH-Wert	9	13	– 4,2	– 8,5	4,6	4	9,5	6,4

8) Schalldruck in Pascal	0,002	0,0002	2	0,2	6,3	8	0,000028	20
dB-Wert	40	20	100	80	110	112	3	120