Extrakapitel für M3

1. Integration durch Substitution

(Umkehrung der Kettenregel)

Beispiel 1:

Berechnen Sie das Integral $I = \int \sqrt{4+5x} \cdot dx$

Lösung:

a) Da die Wurzel eine innere Funktion hat, **substituieren** wir diese und leiten dann ab ...

$$z = 4+5x$$
$$\frac{dz}{dx} (= z') = 5 \qquad |* dx$$
$$dz = 5 * dx \qquad |:5$$
$$dx = \frac{dz}{5}$$

b) Damit setzen wir das **Integral neu** an:

$$I = \int \sqrt{4+5x}\; dx = \int \sqrt{z} \cdot \frac{dz}{5}$$

c) und **integrieren** nach der neuen Variablen z nach dem Vorziehen von 1/5:

$$I = \int \sqrt{z} \cdot \frac{dz}{5} = \frac{1}{5} \cdot \int \sqrt{z}\, dz = \frac{1}{5} \cdot \int z^{\frac{1}{2}}\, dz = \frac{1}{5} \frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{z^3} = \frac{2}{15} \sqrt{z^3}$$

d) dann kann wieder **rücksubstituiert** werden und C dazugeschrieben werden:

$$I = \frac{2}{15} \sqrt{z^3} = \frac{2}{15} \sqrt{(4+5x)^3} + C$$

Übungen zur Substitution:

1a) $\int (1+x)^4\, dx$	1b) $\int (3x-2)^3\, dx$	1c) $\int (2-x)^3\, dx$
2a) $\int x\,(3x^2-1)^2\, dx$	2b) $\int x(5-7x^2)^2\, dx$	2c) $\int x(3-2x^2)\, dx$
3a) $\int (7-71x)^{-2}\, dx$	3b) $\int \frac{x^2}{(5-4x^3)^3}\, dx$	3c) $\int \frac{4x-14}{(x^2-7x+6)^4}\, dx$
4a) $\int \sqrt{2x-2}\, dx$	4b) $\int \sqrt[3]{(3-2x)^2}\, dx$	4c) $\int \sqrt[5]{x(\frac{1}{x}-5)}\, dx$
5a) $\int 2x\sqrt{x^2-5}\, dx$	5b) $\int x\sqrt{x^2+5}\, dx$	5c) $\int -x\sqrt{x^2-1}\, dx$
6a) $\int (5x-12)^{-1/2}\, dx$	6b) $\int \frac{2x^2}{\sqrt[3]{1-x^3}}\, dx$	6c) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\, dx$
7a) $\int \frac{1}{5+x}\, dx$	7b) $\int \frac{x}{x^2+1}\, dx$	7c) $\int \frac{x}{1-x^2}\, dx$
8a) $\int \frac{2x^3}{5-x^4}\, dx$	8b) $\int \frac{4x^3+8x}{(x^2+2)^2}\, dx$	8c)*) $\int \frac{x\cdot(x^2-3)}{(3-x^2)^2}\, dx$
9a) $\int \sin(3x-1) \cdot dx$	9b) $\int \cos(2x-1) \cdot dx$	9c) $\int e^{3x} \cdot dx$

*) zuerst kürzen!

2. Integration durch partielle Integration

(Umkehrung der Produktregel)

Beispiel 2:

Berechnen Sie das Integral $I = \int x \cdot e^x \, dx$

Lösung:

Die Umkehrung der Produktregel ergibt folgende Integrationsregel: $\boxed{\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v}$

Schritt 1: Bestimmen, was u und was v' sein sollen (x soll abgeleitet werden, ist also u)

$$I = \int x \cdot e^x \, dx = \int u \cdot v' \, dx$$

Schritt 2: Tabelle zur Bestimmung der Ableitungen und Integrale:

$u = x$	$v = e^x$
$u' = 1$	$v' = e^x$

Schritt 3: Anwenden der Integrationsregel:

$$I = \int \underbrace{x \cdot e^x}_{u \cdot v'} \, dx = \underbrace{x \cdot e^x}_{u \cdot v} - \int \underbrace{1 \cdot e^x}_{u' \cdot v} \, dx$$

Schritt 4 :Nun kann das Restintegral integriert werden – und wir sind fertig!

$$I = x \cdot e^x - \int e^x \cdot 1 \, dx = x \cdot e^x - e^x + C$$

Beispiel 3:

Mehrfache partielle Integration $\int x^2 \cdot \sin x \, dx$

Lösung:

1. partielle Integration: $\int \underbrace{x^2 \cdot \sin x}_{u \cdot v'} \, dx = \underbrace{x^2 \cdot (-\cos x)}_{u \cdot v} - \int \underbrace{2x \cdot (-\cos x)}_{u' \cdot v} \, dx = -x^2 \cos x + 2\int \underbrace{x \cdot \cos x}_{u \cdot v'} \, dx$

2. partielle Integration: $= -x^2 \cos x + 2 \cdot \left[\underbrace{x \cdot \sin x}_{u \cdot v} - \int \underbrace{1 \cdot \sin x}_{u' \cdot v} \, dx\right]$

3. und Integration des Restintegrals ergibt :

$$= -x^2 \cos x + 2 \cdot [x \cdot \sin x - (-\cos x)] + C =$$
$$\underline{= -x^2 \cos x + 2 \cdot x \cdot \sin x + 2\cos x + C}$$

Beispiel 4:

Integration führt zum Ausgangsintegral: $I = \int \sin x \cdot e^x \, dx$

Lösung:

1. partielle Integration: $I = \int \underbrace{\sin x \cdot e^x}_{u \cdot v'} \, dx = \underbrace{\sin x \cdot e^x}_{u \cdot v} - \int \underbrace{\cos x \cdot e^x}_{u' \cdot v \,/\, u \cdot v'} \, dx$

2. partielle Integration:

$$= \sin x \cdot e^x - \left[\underbrace{\cos x \cdot e^x}_{u \cdot v} - \int \underbrace{(-\sin x) \cdot e^x}_{u' \cdot v} \, dx\right]$$

3: durch Vereinfachung ergibt sich: $= \sin x \cdot e^x - \cos x \cdot e^x - \int \sin x \cdot e^x \, dx$

4: wir haben wieder das Ausgangsintegral bekommen, das wir mit I anschreiben:

$$I = \sin x \cdot e^x - \cos x \cdot e^x - I \qquad | + I$$

5. durch Gleichungsumformung bringen wir das I auf die linke Seite und es ergibt sich:

$$2 \cdot I = \sin x \cdot e^x - \cos x \cdot e^x \qquad | : 2$$

$$I = \frac{\sin x \cdot e^x - \cos x \cdot e^x}{2} + C$$

allgemeine Integrationsregeln:

Funktion	**Integral = Stammfunktion**	**Integral mit Schnellsubstitution**
$f(x) = k$	$F(x) = k\cdot x + C$	$\int (ax+b) = a\frac{x^2}{2} + b\cdot x + C$
$f(x) = x^n \quad (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int (ax+b)^n = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a\cdot(n+1)} + C$
$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$	$F(x) = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{1}{ax+b} = \int (ax+b)^{-1} = \frac{\ln(\lvert ax+b\rvert)}{a} + C$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + C$	$\int \sin(ax+b) = \frac{-\cos(ax+b)}{a} + C$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + C$	$\int \cos(ax+b) = \frac{\sin(ax+b)}{a} + C$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + C$	$\int e^{ax+b} = \frac{e^{ax+b}}{a} + C$
$f(x) = a^x$	$F(x) = a^x / \ln a + C$	$\int 10^{ax+b} = \frac{10^{ax+b}}{a * \ln 10} + C$
Konstante mal Regel $\int k\cdot f(x) = k\cdot \int f(x)$		
Summenregel $\int f(x) + g(x) = \int f(x) + \int g(x)$		

Übungen zur partiellen Integration:

10a) $\int x\cdot e^x \, dx$	10b) $\int x^2 e^x dx$	10c) $\int x^3 \cdot e^x \, dx$
11a) $\int x\cdot e^{-x} dx$	11b) $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$	11c) $\int \ln x \, dx$
12a) $\int x\cdot \ln x \, dx$	12b) $\int x^2 \cdot \ln x \, dx$	12c) $\int x\cdot \sin x \, dx$
13a) $\int x\cdot \cos x \, dx$	13b) $\int x\cdot \cos 2x \, dx$	13c) $\int x^2 \cdot \cos 3x \, dx$
14a*) $\int \sin^2 x \, dx$	14b*) $\int \cos^2 x \, dx$	14c*) $\int \sin x \cdot e^x dx$
15a*) $\int \sin x \cdot \cos x \, dx$	15b) $\int x\cdot \sin 2x \, dx$	15c) $\int x\cdot (1-x)^{10} \, dx$

*) die partielle Integration führt zum Ausgangsintegral ➔ Integralgleichung (I = ...–I ➔ 2·I = ...) oder man ersetzt den Integranden durch eine andere Winkelfunktion laut folgender Tabelle:

Regeln für SIN/COS: **sin x· cos x** = $\frac{\sin 2x}{2}$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	➔	$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$	und	$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$	➔	$\cos^2 x = (\cos 2x + 1) / 2$	und	$\sin^2 x = (1 - \cos 2x) / 2$

3. Integration durch Partialbruchzerlegung

Integrale, die komplizierte Brüche enthalten, lassen sich in Teilbrüche zerlegen, die integrierbar sind

Beispiel 5:

Lösen Sie das Integral $\int \frac{2x^2-5}{x^2-4} \cdot dx$

Lösung:

Dieser Bruch lässt sich zerlegen.

1. durch Polynomdivision, wenn der Zählergrad größer oder gleich dem Nennergrad ist:

$(2x^2 - 5) : (x^2 - 4) = 2$

$-\underline{(2x^2 - 8)}$

/ +3 Rest

daraus ergibt sich folgende Zerlegung: $\frac{2x^2-5}{x^2-4} = 2 + \frac{3}{x^2-4}$

2. der Restbruch wird weiter zerlegt, indem zuerst die Nullstellen des Nenners gesucht werden:

$x^2 - 4 = 0$ ➔ $x_{1,2} = \{2, -2\}$

und mit dem Satz von Vietá zerlegt man den Nenner als Produkt (x–Nullstelle)*(x–Nullstelle):

$x^2 - 4 = (x-2)\cdot(x+2)$

3. Damit kann man nun den unbestimmten Ansatz für den Restbruch machen:

$$\frac{3}{x^2-4} = \frac{3}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+2)}$$

4. Diese Gleichung multipliziert man mit dem Nenner $(x-2)\cdot(x+2)$:

$$3 = A\cdot(x+2) + B\cdot(x-2)$$

und durch Einsetzen der Nullstellen erhält man die Variablen A und B:

$x = 2$ ➔ $3 = A\cdot(2+2) + B\cdot(2-2)$ ➔ $3 = 4\cdot A$ ➔ $A = 3/4 = 0{,}75$

$x = -2$ ➔ $3 = A\cdot(-2+2) + B\cdot(-2-2)$ ➔ $3 = -4\cdot B$ ➔ $B = -3/4 = -0{,}75$

5. damit kann man nun das Integral lösen:

$$\int \frac{2x^2-5}{x^2-4} \cdot dx = \int 2 + \frac{0{,}75}{(x-2)} - \frac{0{,}75}{(x+2)}\, dx = 2x + 0{,}75 \cdot \ln|x-2| - 0{,}75 \cdot \ln|x+2| + C$$

<u>Regeln für die Partialbruchzerlegung</u>:

1. wenn Zählergrad >= Nennergrad ➔ Polynomdivision
2. Nullstellen des Nenners suchen und Nenner damit zerlegen
3. unbestimmter Ansatz des Restbruchs, analog zum Beispiel: $\frac{2x-5}{x^2-4} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+2)}$
4. mit Nenner multiplizieren und die Nullstellen einsetzen ➔ liefert A und B
5. Integration der Partialbrüche (werden meist Logarithmen!)

<u>Übungen zur Partialbruchzerlegung:</u>

16a) $\int \frac{2x^2+x}{x}\, dx$	16b) $\int \frac{x^2-4x+4}{x-2}\, dx$	16c) $\int \frac{x^2-4}{x+2}\, dx$
17a) $\int \frac{5}{x-5}\, dx$	17b) $\int \frac{4x}{x-2}\, dx$	17c) $\int \frac{3x^2}{x+4}\, dx$
18a) $\int \frac{1}{x^2-9}\, dx$	18b) $\int \frac{x+5}{x^2+x}\, dx$	18c) $\int \frac{5x-8}{x^2-5x}\, dx$
19a) $\int \frac{x^2}{x^2-4}\, dx$	19b) $\int \frac{x^2-x}{x^2-10x+25}\, dx$	19c) $\int \frac{2}{x^2+x-6}\, dx$

Lösungen: (ohne „+C")

1a) $\frac{(1+x)^5}{5}+C$ 1b) $\frac{(3x-2)^4}{12}$ 1c) $\frac{-(x-2)^4}{4}$

2a) $\frac{(3x^2-1)^3}{18}$ 2b) $-\frac{(5-7x^2)^3}{42}$ 2c) $\frac{-(3-2x^2)^2}{8}$

3a) $\frac{-1}{71\cdot(71x-7)}$ 3b) $\frac{1}{24(5-4x^3)^2}$ 3c) $\frac{-2}{3(x^2-7x+6)^3}$

4a) $\frac{2\sqrt{(2x-2)^3}}{3}$ 4b) $\frac{3\cdot\sqrt[3]{(2x-3)^5}}{10}$ 4c) $-\frac{1}{6}\cdot\sqrt[5]{(5x-1)^6}$

5a) $\frac{2\sqrt{(x^2-5)^3}}{3}$ 5b) $\frac{\sqrt{(x^2+5)^3}}{3}$ 5c) $-\frac{\sqrt{(x^2-1)^3}}{3}$

6a) $\frac{2\sqrt{5x-12}}{5}$ 6b) $-\sqrt[3]{(x^3-1)^2}$ 6c) $\sqrt{x^2-1}$

7a) ln (|x+5|) 7b) $\frac{\ln(|x^2+1|)}{2}$ 7c) $-\frac{\ln(|x^2-1|)}{2}$

8a) $\frac{-\ln(|x^4-5|)}{2}$ 8b) 2·ln(x²+2) 8c) $\frac{\ln(|x^2-3|)}{2}$

9a) $\frac{-\cos(3x-1)}{3}$ 9b) $\frac{\sin(2x-1)}{2}$ 9c) $\frac{e^{3x}}{3}$

10a) $(x-1)\cdot e^x$ 10b) $(x^2-2x+2)\cdot e^x$ 10c) $(x^3-3x^2+6x-6)\cdot e^x$

11a) $(-x-1)\cdot e^{-x}$ 11b) $\frac{(\ln x)^3}{3}$ 11c) $x\cdot\ln x - x$

12a) $\frac{x^2\cdot\ln x}{2}-\frac{x^2}{4}$ 12b) $\frac{x^3(3\ln x-1)}{9}$ 12c) $\sin x - x\cdot\cos x$

13a) $\cos x + x\cdot\sin x$ 13b) $\frac{\cos 2x}{4}+\frac{x\sin 2x}{2}$ 13c) $\frac{2x\cdot\cos(3x)}{9}+(\frac{x^2}{3}-\frac{2}{27})\cdot\sin(3x)$

14a)
$$\boxed{\begin{aligned}
\int\sin^2 x &= \int\sin x\cdot\sin x = -\cos x\cdot\sin x-\int-\cos x\cdot\cos x\\
&= -\cos x\cdot\sin x+\int 1-\sin^2 x\\
&= -\cos x\cdot\sin x+x-\int\sin^2 x \qquad \left|+\int\sin^2 x\right.\\
2*\int\sin^2 x &= -\cos x\cdot\sin x+x \qquad |:2\\
\int\sin^2 x &= \frac{-\cos x\cdot\sin x+x}{2}
\end{aligned}}$$

14b) $\frac{\sin x\cdot\cos x}{2}+\frac{x}{2}=\frac{\sin 2x}{4}+\frac{x}{2}$

14c) $e^x\cdot(\sin x - \cos x)/2$

15a) $-\frac{\cos^2 x}{2} = -\frac{\cos 2x}{4}+C$ 15b) $\frac{\sin(2x)-2x\cdot\cos(2x)}{4}$ 15c) $\frac{-x\cdot(1-x)^{11}}{11}-\frac{(1-x)^{12}}{132}$

16a) $x^2 + x$ 16b) $\frac{x^2}{2}-2x$ 16c) $\frac{x^2}{2}-2x$

17a) 5·ln(|x–5|) 17b) 4·(2·ln(|x–2|) + x) 17c) 1,5·(32 ·ln(|x+4|) + x·(x-8))

18a) $\frac{-\ln(|x+3|)+\ln(|x-3|)}{6}$ 18b) 5·ln(|x|) – 4·ln(|x-+1|) 18c) $\frac{8\cdot\ln(|x|)+17\cdot\ln(|x-5|)}{5}$

19a) ln(|x-2|) + ln(|x+2|) + x 19b) $9\cdot\ln(|x-5|)-\frac{20}{x-5}+x$ 19c) $-\frac{2}{5}\cdot(\ln(||x+3)-\ln(|x-2|))$

LINKS:

Substitution: http://de.wikipedia.org/wiki/Integration_durch_Substitution
http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/4/substitutions.3/
http://brinkmann-du.de/mathe/gost/diff_int_01_04.htm
partielle Integration: http://de.wikipedia.org/wiki/Partielle_Integration
Partialbruchzerlegung: http://de.wikipedia.org/wiki/Partialbruchzerlegung
Integrationsmaschine (Mathematica) http://www.mathe-online.at/Mathematica/
allgemeines: http://www.mathematik.net/Integ-1/ia-001.htm