

## Gleichungen mit einer Unbekannten

Einen Ausdruck der Form

$$T_1(x) = T_2(x)$$

nennt man *Gleichung* mit der Unbekannten  $x$ .

$T_1$  und  $T_2$  sind dabei beliebige Terme. (Die Unbekannte kann natürlich auch anders benannt werden!)

Je nachdem, welche Zahl man für  $x$  einsetzt, erhält man eine *wahre* oder eine *falsche Aussage*.

*Grundmenge*: alle Zahlen, die zum Einsetzen in die Gleichung vorgesehen sind

*Definitionsmenge*: alle Elemente der Grundmenge, die für die Unbekannte eingesetzt werden *dürfen*

*Lösungsmenge*: alle Elemente der Definitionsmenge, die die Gleichung in eine wahre Aussage überführen

Beispiele:

$$x^2 = 4 \quad G = \mathbb{R} \quad D = \mathbb{R} \quad L = \{-2, 2\}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{5} \quad G = \mathbb{R} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad L = \{5\}$$

Gleichungen, die dieselbe Lösungsmenge haben, heißen *äquivalent*.

### **Äquivalenzumformungen**

Die Lösungsmenge einer Gleichung bleibt gleich, wenn man auf beiden Seiten

- dieselbe Zahl (denselben Term) addiert bzw. subtrahiert,
- mit derselben Zahl (demselben Term)  $\neq 0$  multipliziert,
- durch dieselbe Zahl (denselben Term)  $\neq 0$  dividiert.

Wir werden immer versuchen, eine Gleichung durch Äquivalenzumformungen auf die einfachste Form zu bringen.

Dabei können Sonderfälle auftreten, z.B.:

$$x = x \quad \text{Diese Aussage ist für alle Zahlen wahr} \Rightarrow L = D$$

$$x = x + 1 \quad \text{Diese Aussage ist für alle Zahlen falsch} \Rightarrow L = \{ \}$$

Genauere Erklärungen: *mathe online*, Gleichungen

<http://www.mathe-online.at/mathint/gleich/i.html>

Abschnitte "Gleichung" - "Äquivalenzumformungen"

## Lineare Gleichungen

Eine Gleichung der Form

$$ax + b = 0$$

mit  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$

heißt *lineare Gleichung* (d.h.,  $x$  kommt nur in der ersten Potenz vor).

Sie hat in  $\mathbb{R}$  genau eine Lösung:  $L = \{-b/a\}$

Beispiel: (Wenn nicht anders angegeben, ist die Grundmenge immer  $\mathbb{R}$ )

$$7x - 6 = 4x + 9 \quad | -4x$$

$$3x - 6 = 9 \quad | +6$$

$$3x = 15 \quad | :3$$

$$\underline{x = 5}$$

$$\underline{L = \{5\}}$$

Genauere Erklärungen: *mathe online*, Gleichungen

<http://www.mathe-online.at/mathint/gleich/i.html>

Abschnitte "Lineare Gleichungen", "Normalform der linearen Gleichung"

## Textaufgaben (Lineare Gleichung in einer Variablen)

Beispiel:

Peter gibt von seinem Geld die Hälfte aus, von dem Rest ein Viertel und noch 12 Euro, dann ist er pleite.

Wie viel Geld besaß er am Anfang?

Lösung:

Durch Unterstreichen der wesentlichen Aussagen und übersetzen in  $x$ -Terme ergibt sich eine Gleichung:

$$x - \frac{x}{2} - \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{4} - 12 = 0$$

$$x - \frac{x}{2} - \frac{x}{8} - 12 = 0 \quad \text{auf Achtel bringen}$$

$$\frac{8x}{8} - \frac{4x}{8} - \frac{x}{8} - \frac{96}{8} = 0$$

$$\frac{8x - 4x - x - 96}{8} = 0 \quad | \cdot 8$$

$$3x - 96 = 0 \quad | +96$$

$$3x = 96 \quad | :3$$

$$\underline{x = 32}$$

Am Anfang besaß er 32 Euro.

Tabelle der Operationen:

<i>Operation</i>	<i>1.Term</i>	<i>2.Term</i>	<i>Ergebnis</i>
+ addieren	Summand	<b>Summand</b>	<b>Summe</b>
- subtrahieren	Subtrahend	Minuend	<b>Differenz</b>
* multiplizieren	Faktor	<b>Faktor</b>	<b>Produkt</b>
: dividieren	Dividend	Divisor	<b>Quotient</b>

**Oft hilft es, eine Tabelle aufzustellen, damit man die einzelnen Werte besser überblickt:**

Beispiel:

30 000 Euro sollen so unter drei Preisträgern aufgeteilt werden, dass der zweite Preis  $\frac{3}{2}$  mal so groß wie der dritte, der erste Preis  $\frac{5}{3}$  mal so groß wie der zweite ist.

Lösung:

3.Preisträger	x	<b>6000</b>
2.Preisträger	$\frac{3}{2}$ mal x	<b>9000</b>
3.Preisträger	$\frac{5}{3}$ mal ( $\frac{3}{2}$ mal x)	<b>15000</b>
SUMME	$x + \frac{3}{2}x + \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{2}x$	<b>30000</b>

$$30000 = x + \frac{3}{2}x + \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{2}x$$

$$30000 = x + \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}x$$

$$30000 = \frac{10}{2}x$$

$$30000 = 5x$$

$$6000 = x$$

