MATRIX

WAS IST EINE MATRIX?

Eine Matrix ist eine Tabelle ohne Rand, aber mit Klammern. Manche nennen es „Zahlenschema“

Beispiele: Spaltenvektor$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, Zeilenvektor$\begin{pmatrix}4 & -2 & 3\end{pmatrix}$,

3 *(Zeilen)* mal 2 *(Spalten)* – Matrix $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 6 & 7\end{pmatrix}$, quadratische 3x3 –Matrix $\begin{pmatrix}1 & 5 & -3\\ 3 & 7 & 5\\ -2 & 3 & 9\end{pmatrix}$

WAS KANN MAN MIT MATRIZEN MACHEN?

- Wirtschaftliche Daten verknüpfen (Warenmatrizen addieren)
- Gleichungssysteme lösen ➔ aus $\begin{Bmatrix}2x+3y=7\\ 5x-4y=9\end{Bmatrix}$ wird: $\begin{pmatrix}2 & 3\\ 5 & -4\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\ 9\end{pmatrix}$ ....
- Mehrdimensionale lineare Funktionen darstellen und Probleme damit lösen (Fixpunkt)

DEFINITIONEN:

Matrizen werden mit Großbuchstaben A,B,... oder in der Form (a_{ij}), (b_{ij}),... bezeichnet.

A=$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ bedeutet, dass $a_{11} = 2$, $a_{12} = 1$, $a_{21} = 3$, $a_{22} = 4$ (Der erste Index zeigt die Zeile an, der zweite Index die Spalte)

Einheitsmatrix ist eine Matrix in der Hauptdiagonale lauter Einser, sonst lauter Nullen, z.B: $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Transponieren heißt, die Zeilen in Spalten umwandeln A=$\begin{pmatrix}2 & \mathbf{1}\\ \mathbf{3} & 4\end{pmatrix}$ ➔ $A^T = \begin{pmatrix}2 & \mathbf{3}\\ \mathbf{1} & 4\end{pmatrix}$

Addieren, Subtrahieren und **mit einer reellen Zahl multiplizieren** wird elementweise gemacht**:**

z.B.: $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-4 & -5\\ 6 & 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-4 & 1-5\\ 3+6 & 4+5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & -4\\ 9 & 9\end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}*5 = \begin{pmatrix}10 & 5\\ 15 & 20\end{pmatrix}$

Die **MULTIPLIKATION** zweier Matrizen wird mit dem <u>FALK–Schema</u> gemacht:

Beispiel: Bilde das Produkt von $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}$ mit $\begin{pmatrix}7 & 8\\ 9 & 0\end{pmatrix}$

Lösung: Die Multiplikation erfolgt ähnlich wie beim skalaren Produkt zweier Vektoren, allerdings wird hier die erste Zeile der ersten Matrix mit der ersten Spalte der zweiten Matrix skalar multipliziert, was so aussieht $\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}7\\ 9\end{pmatrix}$ = 1·7 + 2·9 = 25 und das ist das erste Ergebnis der Zielmatrix. Wir stellen beide Matrizen im Falk–Schema auf:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix}\boxed{7} & 8\\ \boxed{9} & 0\end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix}\boxed{1 \quad 2}\\ 3 \quad 4\\ 5 \quad 6\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}\boxed{25} & 8\\ 57 & 24\\ 89 & 40\end{pmatrix}\end{array}$$

wobei dann auch 8 = 1·8+2·0 57 = 3·7+4·9 24 = 3·8+4·0 ....

Übungen

1) Gib den Typ der Matrix an und bestimme das Element a_{21}:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 3 & 7 & 5 \\ -2 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

2) Gib von den Matrizen von 1)a)–d) die transponierte Matrix an

3) A=$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ B=$\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ C=$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

Bilde die Matrizen a) A+B b) B–A c) C·3 d) A–C

4) A=$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ C= $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ D= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Bilde, wenn das möglich ist, die Matrizen a) A*B b) A*C c) C*A d) D*A e) B^T*C f) C*D^T g) B*D

5) A= $\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ E=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Berechne A*E und E*A. Was fällt Dir auf?

6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 4 & 0 \end{pmatrix} =$

7) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} =$

8) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} =$

9) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$

10) $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 4 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

11) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 4 & 0 \end{pmatrix} =$

12) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} =$

13) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$

Anwendungen

Beispiel: Verkaufsmatrix und Preisvektor beim Würstelstand

Bei zwei Wiener Würstelständen gibt es Frankfurter, Debreziner und Käsekrainer.
Die Anzahl der verkauften Würstel am 14. Feber sind in der folgenden Tabelle ersichtlich:

	Frankfurter	Debreziner	Käsekrainer
Würstelstand 1	6	7	1
Würstelstand 2	12	14	3

a) Erstellen Sie eine Verkaufsmatrix V der Wurstwaren daraus
b) Erstellen Sie einen Vektor P der Wurstpreise, wenn Frankfurter 3€, Debreziner 4€ und Käsekrainer 5€ kosten
c) Berechnen Sie die Einnahmen der 2 Würstelstände durch Multiplikation der Verkaufsmatrix V mit dem Preisvektor P

Lösung:

a) Die Verkaufsmatrix wird zu $V = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 1 \\ 12 & 14 & 3 \end{pmatrix}$

b) Der Preisvektor ist senkrecht: $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

c) Das Produkt wird durch Zeile mal Spalte berechnet:

$$\begin{pmatrix} 6 & 7 & 1 \\ 12 & 14 & 3 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + 1 \cdot 5 \\ 12 \cdot 3 + 14 \cdot 4 + 3 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 \\ 107 \end{pmatrix}$$

Würstelstand 1 hat 51€ verdient und Würstelstand 2 hat 107€ verdient

Beispiel: Bedarfsmatrizen

Ein Restaurant produziert Hamburger und Rindsschnitzel. Weil ein Mathematiker an Bord ist, will er die Bedarfsgrößen Rindfleisch und Arbeitskosten in Form einer Matrix aufbereiten, um den Bedarf mit Computer berechnen zu können.
Für einen **Hamburger** benötigt man 100 g Rindfleisch und 3 € Arbeitskosten
Für ein **Rindschnitzel** benötigt man 150 g Rindfleisch und 2 € Arbeitskosten
Wie viel g Rindfleisch und wie viel € Arbeitskosten braucht man zur Herstellung von 50 Hamburgern und 20 Rindsschnitzeln ?

Lösung:

Man das auch mit einer Bedarfsmatrix $BM = \begin{pmatrix} 100g & 150g \\ 3€ & 2€ \end{pmatrix}$ schreiben und mit einem Output Vektor $O = \begin{pmatrix} 50 \\ 20 \end{pmatrix}$. Das Produkt der Bedarfsmatrix mit dem Verkaufsvektor ergibt die gesamten Bedarfsmengen für die Produktion von Hamburgern und Rindsschnitzeln:

$$\begin{pmatrix} 100g & 150g \\ 3€ & 2€ \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 50 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \cdot 50 + 150 \cdot 20 \\ 3 \cdot 50 + 2 \cdot 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8000g \\ 190€ \end{pmatrix}$$

Es gilt also: **Bedarfsmatrix** mal **Outputvektor** ist **Inputvektor**

BM	*****	**OV**	**=**	**IV**

Aufgaben:

14) Zwei Geschäfte verkaufen PCs, Laptops und Handys eines bestimmten Typs an einem Tag im Feber, siehe Tabelle:

	PCs	Laptops	Handys
Geschäft 1	3	5	6
Geschäft 2	1	7	8

Die Preise sind: PC: 550e, Laptop 350€, Handy 220€
Erstellen Sie die Verkaufsmatrix und den Preisvektor und berechnen Sie damit die Einnahmen der beiden Geschäfte.

15) 3 Firmen bestellen Papierpakete und Druckertinten, wie in der Tabelle ersichtlich ist:

	Papierpakete	Druckertinten
Firma 1	15	3
Firma 2	12	5
Firma 3	8	2

Die Preise sind: Papierpaket: 12€ und Druckertinte 25€
Erstellen Sie die Verkaufsmatrix und den Preisvektor und berechnen Sie damit die Kosten für die drei Firmen.

16) Ein Betrieb will Schokoeier und Schokohasen produzieren:
Für ein Schokoei braucht man 50g Schokolade und 5 Minuten Arbeitszeit
Für einen Schokohasen braucht man 120g Schokolade und 8 Minuten Arbeitszeit.
Stellen Sie die Bedarfsmatrix auf und berechnen Sie die Schokoladenmenge und die Arbeitszeit für 200 Schokoeier und 150 Schokohasen!

17) Ein Betrieb will Schrauben und Nägel produzieren:
Für einen Schrauben braucht man 12 g Stahl und 25 Sekunden Produktionszeit
Für einen Nagel braucht man 8g Stahl und 15 Sekunden Produktionszeit
Stellen Sie die Bedarfsmatrix auf und berechnen Sie die Stahlmenge und die Produktionszeit für 1500 Schrauben und 2000 Nägel

18) Ein Bauer muss Weizen und Mais erzeugen.
Für 1 kg Weizen braucht er 30 m² Grund und 20 min Arbeitszeit
Für 1 kg Mais braucht er 18 m² Grund und 35 min Arbeitszeit
Stellen Sie die Bedarfsmatrix auf und berechnen Sie die Grundstücksgröße und die Arbeitszeit für 200 kg Weizen und 150 kg Mais

Determinanten und Gleichungen

Was ist eine Determinante?

- Jeder quadratischen Matrix kann eine einzelne Zahl zugeordnet werden, die **Determinante**.
- Die Determinante gibt an, ob die Matrix invertierbar ist.
- Die Determinante gibt an, wie sich das Volumen bei der durch die Matrix beschriebenen linearen Abbildung ändert.
- Die Determinante ist ein nützliches Hilfsmittel bei der Lösung linearer Gleichungssysteme.

Wie kann man die Determinante berechnen?

- Die quadratische Determinante einer 2x2−Matrix ist das Produkt der Hauptdiagonale minus das Produkt der Nebendiagonale:
  $\left|\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right|$ = a·d − c·b
- Die Determinante einer 3x3−Matrix kann mit der Regel von Sarrus (Jägerzaunregel) berechnet werden:
  Zuerst wird neben die Matrix die erste und zweite Spalte der Matrix dazugeschrieben:
  $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{matrix}$$
  Dann werden die Produkte der Hauptdiagonale und der parallelen Diagonalen addiert:
  $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{matrix} \qquad \mathbf{1\cdot5\cdot9 + 2\cdot6\cdot7 + 3\cdot4\cdot8 = 225}$$
  Danach werden die Produkte der Nebendiagonale und der parallelen Diagonalen addiert:
  $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{matrix} \qquad \mathbf{7\cdot5\cdot3 + 8\cdot6\cdot1 + 9\cdot4\cdot2 = 225}$$
  Zum Schluss werden beide Summen subtrahiert: **225 – 225 = 0**
  Wenn nun 0 wie hierherauskommt, ist die Matrix **singulär** (Gegenteil: regulär) und kann **nicht invertiert** werden und auch **kein eindeutiges Ergebnis bei Gleichungen** liefern!

Wie kann man mit Determinanten Gleichungen lösen?

Beim <u>Beispiel des Gleichungssystems</u> $\begin{Bmatrix} 2x + 3y = \mathbf{7} \\ 4x - 2y = \mathbf{6} \end{Bmatrix}$ muss man zuerst die Koeffizienten−Matrix der linken Seite erstellen: D = $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ und die Determinante davon berechnen

D = $\left|\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\right|$ = 2·(−2) − 4·3 = −16

Da diese Determinante ungleich Null ist, kann man weitermachen und die x−Determinante der Matrix berechnen, die aus der Koeffizienten−Matrix entsteht, wenn man die linke Spalte durch die rechte Seitenspalte der Gleichung ersetzt: D_x = $\left|\begin{pmatrix} \mathbf{7} & 3 \\ \mathbf{6} & -2 \end{pmatrix}\right|$ = 7·(−2) − 6·3 = −32

Der Wert von x ist der Bruch aus D_x und D ➔ x = $\frac{Dx}{D} = \frac{-32}{-16}$ = 2

Ebenso berechnet man D_y durch Ersetzen der rechten Spalte der Koeffizienten−Matrix durch die rechte Seitenspalte der Gleichung ersetzt: D_y = $\left|\begin{pmatrix} 2 & \mathbf{7} \\ 4 & \mathbf{6} \end{pmatrix}\right|$ = 2·6 − 4·7 = −16

Der Wert von y ist der Bruch von D_y und D ➔ y = $\frac{Dy}{D} = \frac{-16}{-16}$ = 1

Ergebnis: **Die Lösung ist (x|y) = (2|1)**

WIE KANN MAN MIT DER INVERSEN MATRIX GLEICHUNGEN LÖSEN?

Dazu brauchen wir die **Definition der Inversen Matrix A^{-1}** zur Matrix A:

Wenn die Determinante der Matrix A nicht Null ist, kann man die Inverse Matrix A^{-1} bilden, die mit A multipliziert die Einheitsmatrix E ergibt ➔ $A * A^{-1} = E$

Für die 2x2–Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gilt $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ (Hauptdiagonalen vertauscht und Minusse)

BEISPIEL: BESTIMME DIE INVERSE MATRIX ZU $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ UND BERECHNE $A*A^{-1}$ UND $A^{-1}*A$

Lösung: $|A| = 2\cdot 2 - 1\cdot 3 = 1$ ➔ $A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$A*A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ebenso für $A^{-1}*A = E$

Beispiel: Das Gleichungssystem $\begin{Bmatrix} 2x + 3y = \mathbf{7} \\ x + 2y = \mathbf{4} \end{Bmatrix}$ soll in Matrixform dargestellt werden und dann mit der Inversen Matrix gelöst werden

Lösung: Die Koeffizienten–Matrix ist $D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ und der rechte Seite–Spaltenvektor ist $r = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$. Der Lösungvektor ist $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und damit ist die Gleichung in der Form schreibbar:

$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$. **Multipliziert man die Gleichung von links mit der Inversen Matrix** von D, so ergibt sich: $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Daraus ergibt sich $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ➔ und das ist die Lösung: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die Lösung der Gleichung $A*x = r$ ergibt sich durch $x = A^{-1}*r$

Die Inverse Matrix einer 3x3–Matrix ist komplizierter zu berechnen –siehe:
https://www.mathebibel.de/inverse-matrix-berechnen-nach-gauss-jordan

++

EXTRA: ZAHLENSPIEL:

Was entsteht, wenn man die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ der Reihe nach mit den Vektoren

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ multipliziert?

Lösung: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Der erste Vektor ist die erste Spalte der Matrix, der zweite Vektor ist die zweite Spalte der Matrix.
Der dritte Vektor ist die Summe der zwei Spaltenvektoren der Matrix, der vierte die Differenz.

Der fünfte Vektor ist das Vierfache des Ausgangsvektors und der sechste Vektor ist das Nullfache des Ausgangsvektors (das sind die beiden **Eigenvektoren** der Matrix zu den zwei **Eigenwerten** 4 und 0)

Übungen:

19) Berechne die Determinanten der folgenden Matrizen

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & x \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & -5 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & 4 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

20) Wie groß ist x?

a) $\left|\begin{pmatrix} x & -1 & 2 \\ 0 & 8 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\right| = 24$ b) $\left|\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & x & 0 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}\right| = 30$

21) Berechne die Lösung der Gleichung mit den Determinanten D, D_x, D_y

a) $\begin{Bmatrix} 5x + 3y = 25 \\ x + 3y = 17 \end{Bmatrix}$ b) $\begin{Bmatrix} 4x + 3y = 11 \\ 2x - y = 3 \end{Bmatrix}$ c) $\begin{Bmatrix} 10x - 3y = -3 \\ 4y - 1 - 5x = 0 \end{Bmatrix}$ d) $\begin{Bmatrix} x = 3 + y \\ 2x + 3y = 16 \end{Bmatrix}$

22) Berechne die Inverse Matrix A^{-1}

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

23) Stelle das Gleichungssystem in Matrizenform dar (A*x=b) und löse es mit der Inversen Matrix
− mit den Gleichungen von 21) a) bis d)

EXTRAAUFGABEN

24) Überprüfe, ob a=$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ oder b=$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor der Matrix M=$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ist und gib den Eigenwert dazu an *(ein **Eigenvektor** wird durch die Multiplikation mit der Matrix auf das Vielfache seines Wertes abgebildet. Die Zahl, mit der der Vektor multipliziert wurde, heißt **Eigenwert**)*

25) Was macht die Drehmatrix $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mit den Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, wenn man die Vektoren mit der Matrix multipliziert?

Lösungen:

1) a) 3x2−Matrix, a_{21}=3 b) quadratische 3x3−Matrix, a_{21}=3 c) Spaltenvektor, a_{21}=9 d) Zeilenvektor, a_{21}= ex. Nicht

2) a) $\begin{pmatrix}1&3&5\\2&4&6\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1&3&-2\\5&7&3\\-3&5&9\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}7&9\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix}$

3) a) $\begin{pmatrix}4&2\\-4&6\\10&4\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}11&-2\\-2&-2\\0&4\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}6&0&-3\\9&12&3\end{pmatrix}$ d) geht nicht

4) a) $\begin{pmatrix}-16\\-2\\30\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}0&8&5\\10&16&5\\10&0&-5\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}-11&4\\-8&22\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}10&10\end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix}15&4&-5\end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix}-1\\14\end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix}6&12&18\\1&2&3\end{pmatrix}$

5) A*E = A und E*A =A weil E die Einheitsmatrix ist und alles gleich lässt bei Multiplikation

6) $\begin{pmatrix}13&19&12&1\\9&21&12&3\\20&24&16&0\end{pmatrix}$ 7) $\begin{pmatrix}32\end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}$ 9) $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

10)=11) $\begin{pmatrix}3&7&4&1\\5&6&4&0\end{pmatrix}$ 12) $\begin{pmatrix}14&-2&-14\\10&-6&-8\\-1&3&-3\end{pmatrix}$ 13) $\begin{pmatrix}1&3&6\\6&-2&2\\7&5&6\end{pmatrix}$

14) Einnahmen sind: 4720€ und 4760€
15) Kosten sind: 255€, 269€, 146€
16) 28 kg, 36h 40min
17) 34 kg, 18h 45min
18) 8700m², 154h 10min
19) a) 3 b) 0 c) 3x−5 d) 20 e) −30 f) 5 g) −90 h) 6
20) a) x=4 b) x=2
21a) D= 12, D_x= 24, D_y= 60 ➔ x=24/12 =2 y=60/12 = 5
21b) D= −10, D_x= −20, D_y= −10 ➔ x= −20/−10 = 2 y= −10/−10 = 1
21c) D= 25, D_x= −9, D_y= −5 ➔ x= −9/25 y= −5/25
21d) D= 5, D_x= 25, D_y= 10 ➔ x= 25/5 = 5 y= 10/5 =2

22a) $\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}3&0\\-2&1\end{pmatrix}$ b) geht nicht c) $\frac{1}{20}\cdot\begin{pmatrix}6&-2\\1&3\end{pmatrix}$ d) $\frac{1}{20}\cdot\begin{pmatrix}5&-5\\1&3\end{pmatrix}$ e) $\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix}$

23a) $\begin{pmatrix}5&3\\1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25\\17\end{pmatrix}$ ➔ $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{12}\cdot\begin{pmatrix}3&-3\\-1&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}25\\17\end{pmatrix}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}24\\60\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$

23b) $\begin{pmatrix}4&3\\2&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\\3\end{pmatrix}$ ➔ $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{-10}\cdot\begin{pmatrix}-1&-3\\-2&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}11\\3\end{pmatrix}=\frac{1}{-10}\begin{pmatrix}-20\\-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

23c) $\begin{pmatrix}10&-3\\-5&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ ➔ $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{25}\cdot\begin{pmatrix}4&3\\5&10\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}-9\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9/25\\-5/25\end{pmatrix}$

23d) $\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\16\end{pmatrix}$ ➔ $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}3&1\\-2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\16\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}25\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$

24) a ist Eigenvektor mit Eigenwert 5 (wird auf $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\cdot 5$ abgebildet) b Eigenvektor mit Eigenwert 1

25) Die Vektoren werden nach links um 90° gekippt