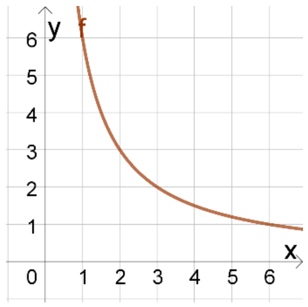
Funktionsdiskussion_1

AUFGABE1:
Sabine soll 6 km zu einem See gehen. Sie kann mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten unterwegs sein (von 1km/h bis 6 km/h). Wie ändert sich die Gehzeit dabei.
- Erstellen Sie eine Funktion dazu und eine Wertetabelle mit Graph.
- Beschreiben Sie die Funktion

LÖSUNG:
Es gibt den Zusammenhang: km/h mal h = km
oder als Formel: Geschwindigkeit mal Zeit ist Weg und mit Buchstaben: **v · t = s**
Weil wir die Zeit t wollen, müssen wir umformen: **t =** $\frac{s}{v}$
und als Funktion f mit Zahlen (s = 6 km, Geschwindigkeit = x km/h): **f(x) =** $\frac{6}{x}$
Wertetabelle der Funktion und Graph:

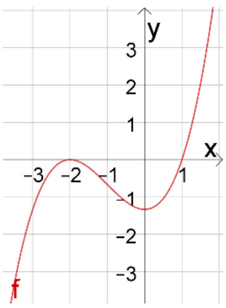
x	1	2	3	4	5	6
f(x)	6:1 = 6	6:2 = 3	6:3 = 2	6:4 = 1,5	6:5 = 1,2	6:6 = 1



Beschreibung: Wenn das x größer wird, wird der Funktionswert kleiner
Das heißt auf mathematisch: **sie ist monoton fallend im Intervall [1;6]**

AUFGABE 2:
Beschreibe die folgende Funktion mit den Begriffen Monotonie, Hoch– und Tiefpunkt:

LÖSUNG:



Die Funktion ist monoton steigend im Intervall [-4;-2] zum **Hochpunkt** (-2|0)
Die Funktion ist monoton fallend im Intervall [-2;0] zum **Tiefpunkt** (0|-1,333)
Die Funktion ist monoton steigend im Intervall [0;2]

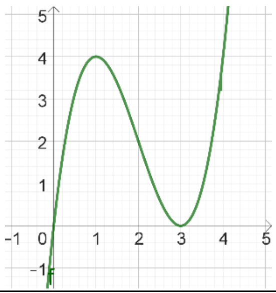
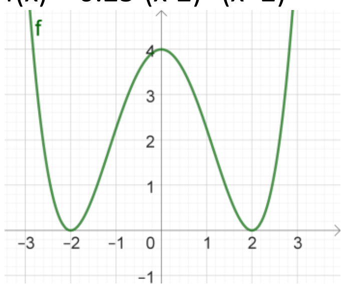
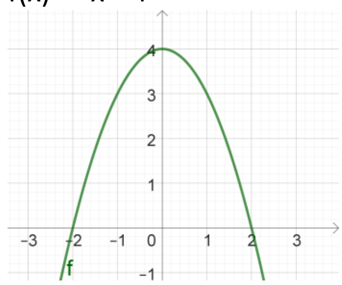
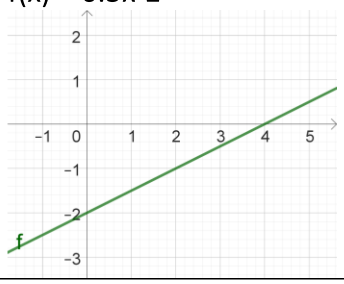
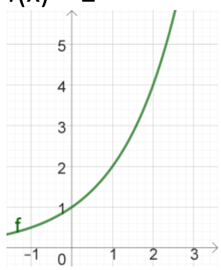
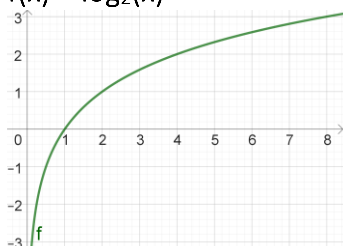
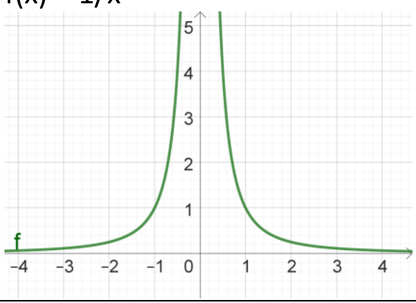
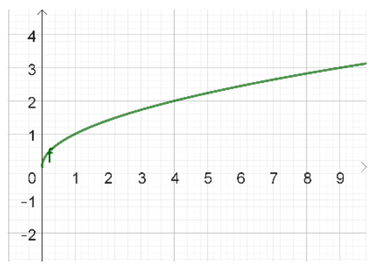
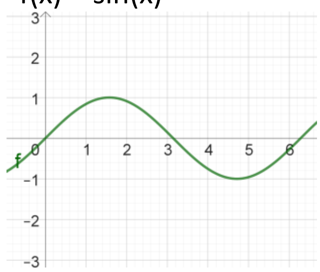
$f(x)= 1/3\cdot x^3+x^2-1{,}333$

Genauere Definitionen:

Eine Funktion ist **im Intervall [a;b] monoton steigend**, wenn gilt: aus $x_1<x_2$ folgt $f(x_1) \leq f(x_2)$
Eine Funktion ist **im Intervall [a;b] monoton fallend**, wenn gilt: aus $x_1<x_2$ folgt $f(x_1) \geq f(x_2)$
Eine (lokale) **Extremstelle** einer Funktion ist die Stelle x = e, bei der ein **Monotoniewechsel** stattfindet. Dabei wird zwischen einem (lokalen) **Minimum** und einem (lokalen) **Maximum** unterschieden.
Die zugehörigen Punkte werden **Tiefpunkt** und **Hochpunkt** genannt.

Übungen:

1) Beschreibe das Monotonieverhalten und gib die Koordinaten der Extremwerte der folgenden Funktionen an:

a) $f(x) = x\cdot(x-3)^2$ 	b) $f(x) = 0.25\cdot(x-2)^2\cdot(x+2)^2$ 	c) $f(x) = -x^2+4$ 
d) $f(x) = 0.5x-2$ 	e) $f(x) = 2^x$ 	f) $f(x) = \log_2(x)$ 
g) $f(x) = 1/x^2$ 	h) $f(x) = \sqrt{x}$ 	i) $f(x) = \sin(x)$ 

2) Konstruiere (zeichne) eine Funktion:

a) Die Funktion steigt monoton im Intervall [-3;0], sie fällt monoton im Intervall [0;3]

b) Die Funktion hat bei x= -2 einen Hochpunkt, bei x= 3 einen Tiefpunkt

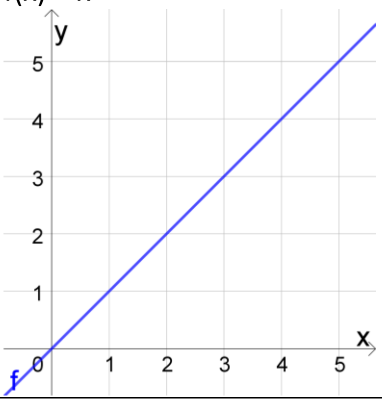
c) Die Funktion ist monoton steigend im Intervall [1;4] und monoton fallend im Intervall [4;6]

d) Die Funktion hat bei x= -4 einen Tiefpunkt und bei x= 2 einen Hochpunkt.

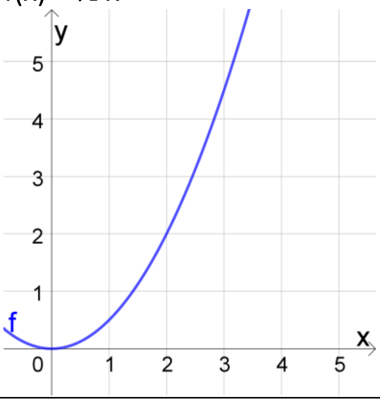
Potenzfunktionen sind Funktionen der Bauart $f(x) = a \cdot x^n$

ist n positiv, so sind sie für $x \geq 0$ monoton wachsend

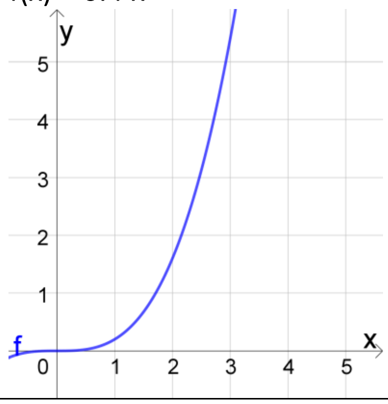
$f(x) = x$



$f(x) = \frac{1}{2} x^2$

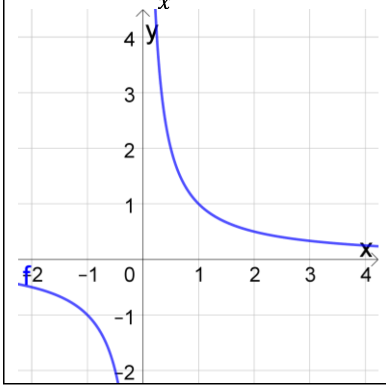


$f(x) = 0.4 \cdot x^3$

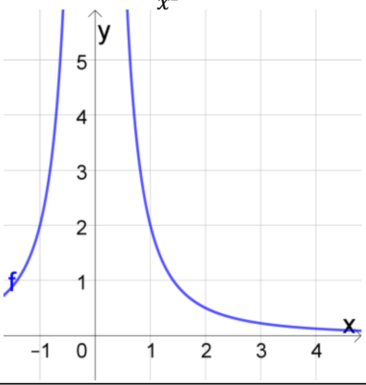


ist n negativ, so sind sie für $x \geq 0$ monoton fallend

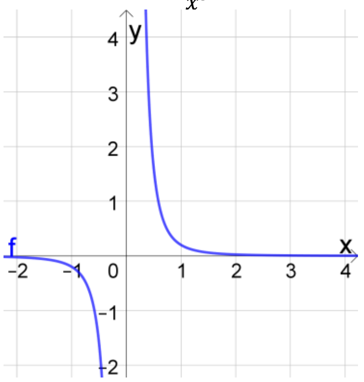
$f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$



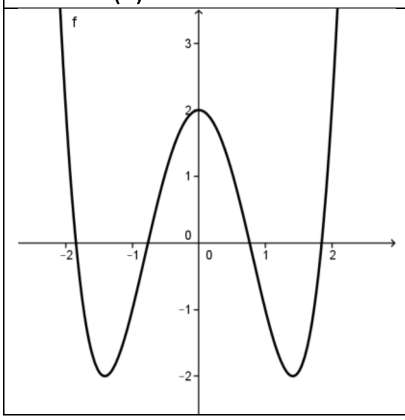
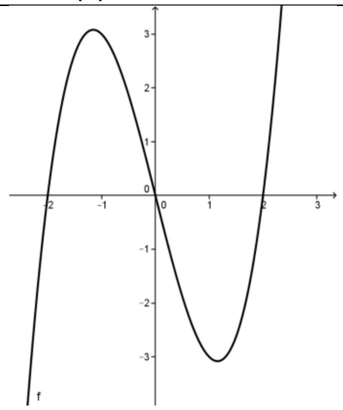
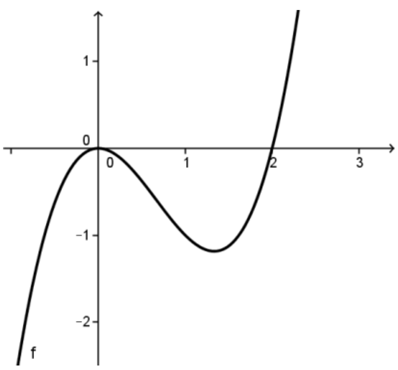
$f(x) = 2x^{-2} = \frac{2}{x^2}$



$f(x) = 0.2x^{-3} = \frac{0.2}{x^3}$



Polynomfunktionen sind Kombinationen der ersten 3 Grundfunktionen:

Kombinationen von nur Funktionen mit geraden positiven Exponenten sind **y–Achsen–symmetrisch**, z. B.: $f(x) = x^4-4x^2+2$	Kombinationen von nur Funktionen mit ungeraden positiven Exponenten sind **Ursprung–(anti)symmetrisch**, z. B.: $f(x) = x^3-4x$	beliebige Kombinationen sind nicht symmetrisch, z.B.: $f(x) = x^3-2x^2$
		

Mit diesen **Polynom–Funktionen** werden wir uns nun näher beschäftigen.

1. Ziel: Vom Funktionsterm ausgehend – eine **Wertetabelle** erstellen und den **Graphen** zeichnen

2. Ziel: Vom Funktionsterm ausgehend die **Nullstellen** berechnen und dann auch die **Intervalle** bestimmen, in denen die Funktion monoton steigend und fallend ist.

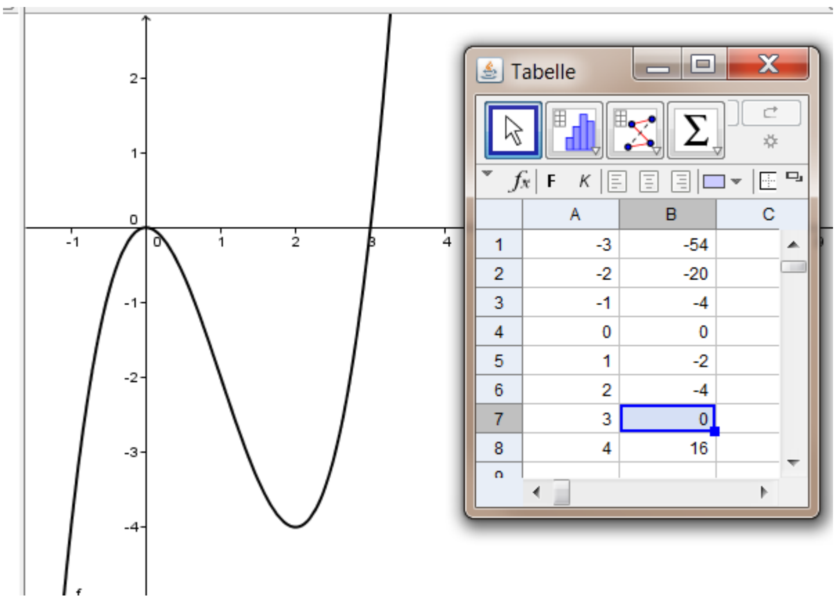
AUFGABE 4:

a) Erstelle eine Wertetabelle und den Graphen der Funktion $f(x) = x^3 - 3x^2$

b) Berechne die Nullstellen der Funktion und bestimme die Intervalle der Monotonie und die Extrempunkte

----

Lösung: a)



b) Nullstellen: $x^3 - 3x^2 = 0$ | x^2 herausheben

$x^2 \cdot (x-3) = 0$ |trennen

$x^2 = 0$ oder $x - 3 = 0$

ergibt als Lösungen $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$

ergibt die Nullstellen: **$N_1(0|0)$ und $N_2(3|0)$**

Monotonie: im Intervall $[-1;0]$ monoton steigend zum Hochpunkt $(0|0)$

im Intervall $[0;2]$ monoton fallend zum Tiefpunkt $(2|-20)$

im Intervall $[2;4]$ monoton steigend

Übungen:

Erstelle eine Wertetabelle und damit den Graphen der Funktion. Bestimme die Nullstellen und die Monotonie–Bereiche der Funktion sowie die Extremwerte:

3) $f(x) = x^2 - 3 \cdot x$

4) $f(x) = -x^2 - 2x + 3$

5) $f(x) = -x^3 - 3x^2$

6) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 7$

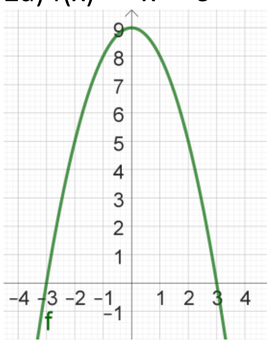
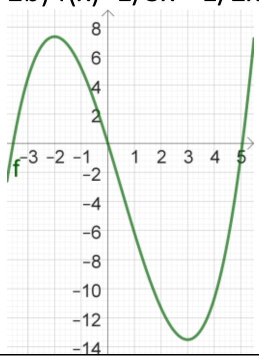
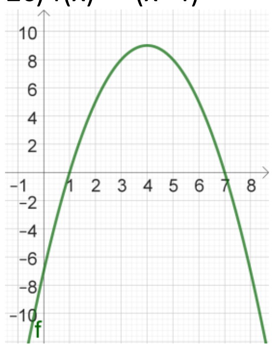
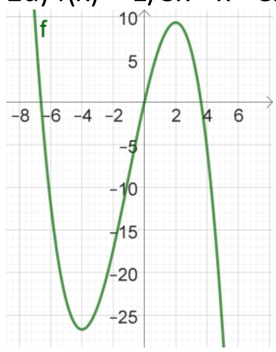
7) $f(x) = {}^1/3 \cdot x^3 - 4x$

8) $f(x) = ¼ \cdot x^4 - 2x^2$

9) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$

Lösungen:

1) a) steigend in [0;1], fallend in [1;3], steigend in [3;4], H(1|4), T(3|0)
   b) fallend in [-3;-2], steigend in [-2;0], fallend in [0;2], steigend in [3;3], T(-2|0), H(0;4), T(2|0)
   c) steigend in [−2;0], fallend in [0;2], H(0|4)
   d) steigend in [−1;5],
   e) steigend in [−1;3]
   f) steigend in [0;8]
   g) steigend in [−4;0], fallend in [0;4]
   h) steigend in [0;9]
   i) steigend in [0;1,5], fallend in [1,5;4,5], steigend in [4,5;6]

2a) $f(x) = -x^2 + 9$	2b) $f(x)=1/3x^3-1/2x^2-6x$	2c) $f(x)= -(x-4)^2$	2d) $f(x)=-1/3x^3-x^2+8x$
			

3) N_1 (0|0), N_2 (3|0), T(1.5|−2.25), fallend: [−2;1.5], steigend: [1,5;4]
4) N_1 (−3|0), N_2 (1|0), H(−1|4), steigend: [−4; −1], fallend: [−1; 2]
5) N_1 (−2|0), N_2 (0|0), T(−2|−4), H(0|0), fallend [−4;−2], steigend: [−2;0], fallend [0;3]
6) N_1 (−1|0), N_2 (3,5|0), T(2|−27), H(−1|0), steigend in [−3;−1], fallend in [−1; 2], steigend in [2; 4]
7) N_1 (−3,46|0), N_2 (0|0), N_3(3,46|0), T(2|−5,333), H(−2|5,333), …..
8) N_1 (−2,83|0), N_2 (0|0), N_3(2,83|0), T(−2|−4), H(0|0), T(2|−4) ,….
9) N_1 (−2|0), N_2 (2|0), T(−2|0), H(0|16), T(2|0), …