Einführung in die komplexen Zahlenkl

Wiederhole: Anzahl der Lösungen einer quadratischen Gleichung ist abhängig von der Diskriminate (= „das was unter der Wurzel steht“)

In der Menge der reellen Zahlen IR können wir nicht alle quadratischen Gleichungen lösen, da die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl keine reelle Zahl ist.

Wir erweitern daher die Menge der reellen Zahlen so, dass

- auch das Wurzelziehen unbeschränkt ausführbar ist
- die in IR gültigen Axiome weiter gültig bleiben

Definition: Die imaginäre Einheit i ist jene Zahl, für die gilt $i^2 = -1$
Imaginäre Zahlen sind Zahlen der Form b*i

Beispiel: Schreibe mit Hilfe der imaginären Einheit
$\sqrt{-4}$; $\sqrt{-16}$; $\sqrt{-b^2}$; $\sqrt{-a}$

Potenzen von i: $i^0= 1$; $i^1 = i$; $i^2 = -1$; $i^3= i* i^2= -i$; $i^4= i^2 *i^2= 1$

Definition: Zahlen der Form z = a+bi a,b ∈ iR nennen wir komplexe Zahlen.
Dabei heißt a = Re(z) der Realteil und b = Im(z) der Imaginärteil einer komplexen Zahl z.

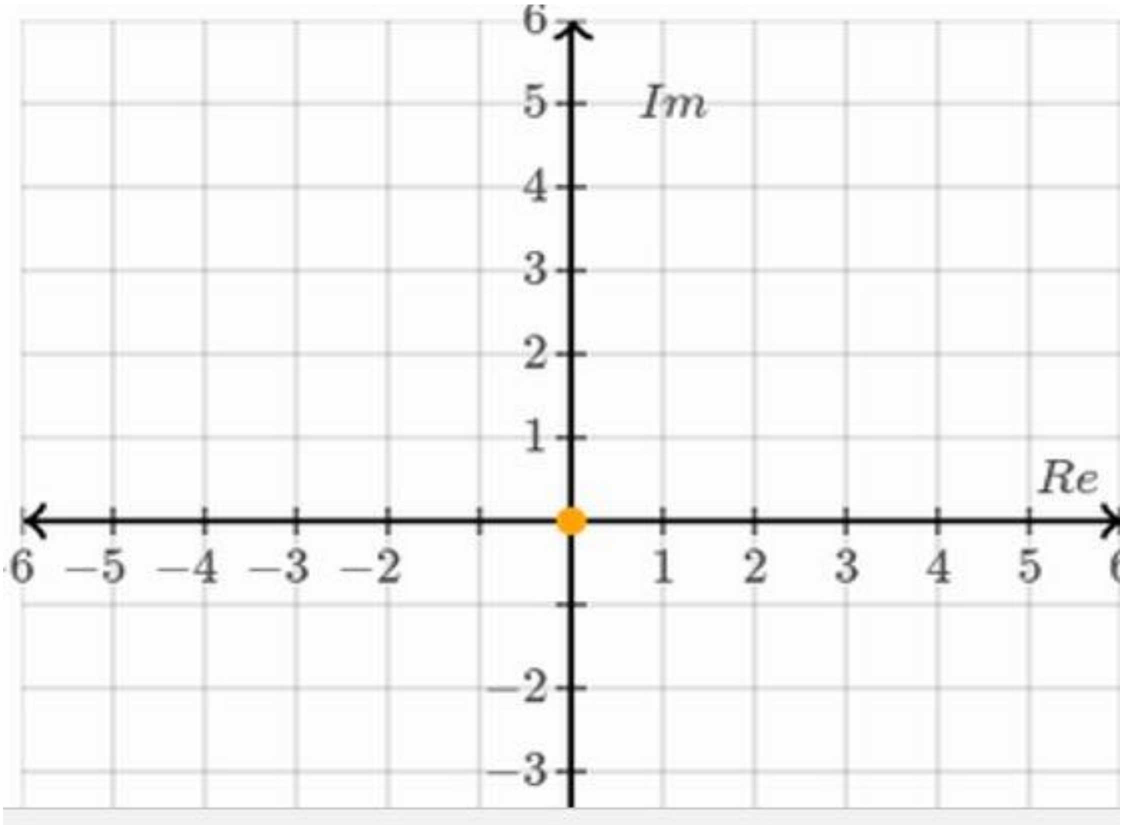
Komplexe (Gauß`sche) Zahlenebene

Die reellen Zahlen füllen die Zahlengerade vollständig aus. Für die graphische Darstellung komplexer Zahlen erweitern wir die Zahlengerade daher zu einer Zahlenebene.
Eine komplexe Zahl z = a + bi wird in der Gauß`schen Zahlenebene als Punkt oder Pfeil dargestellt. Der Realteil Re(z) auf der reellen (x-)Achse, der Imaginärteil Im(z) auf der dazu normal stehenden (y-) Achse abgetragen.

Definition: Der Betrag IzI einer komplexen Zahl ist gegeben durch IzI = $\sqrt{a^2 + b^2}$

Beispiel: Veranschauliche die komplexen Zahlen auf der Gauß`schen Zahlenebene und gib deren Beträge an.

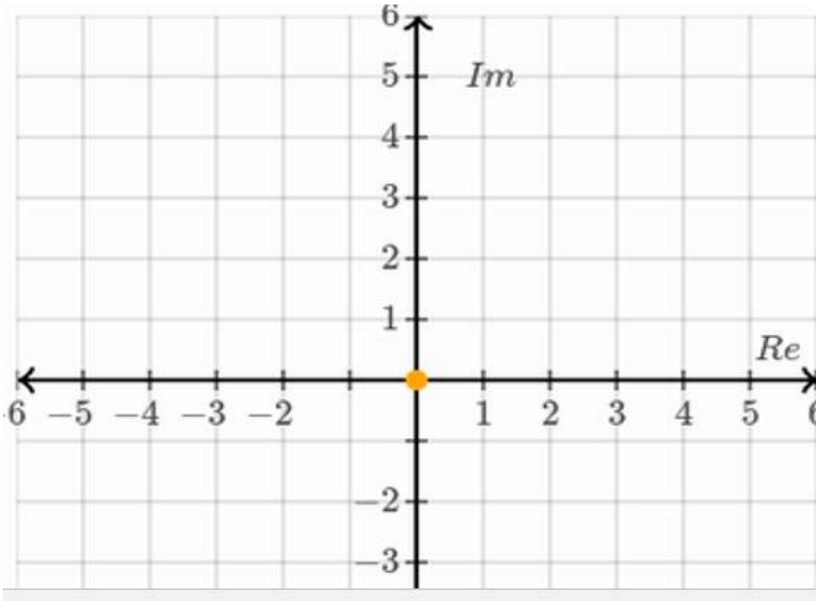
$$z_1 = 3; z_2 = 2i; z_3 = -4 + 3i; z_4 = 2 - 3i$$



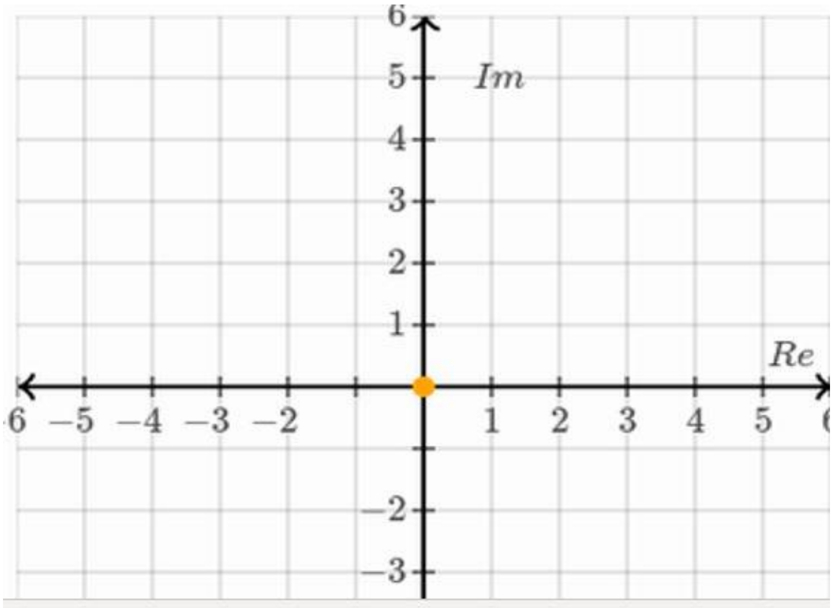
Rechnen mit komplexen Zahlen

Gegeben sind zwei komplexe Zahlen $z_1=6-2i$ und $z_2=4+3i$.
Ermittle a) $z_1 + z_2$ b) $z_1 - z_2$ rechnerisch und grafisch.

a)



b)

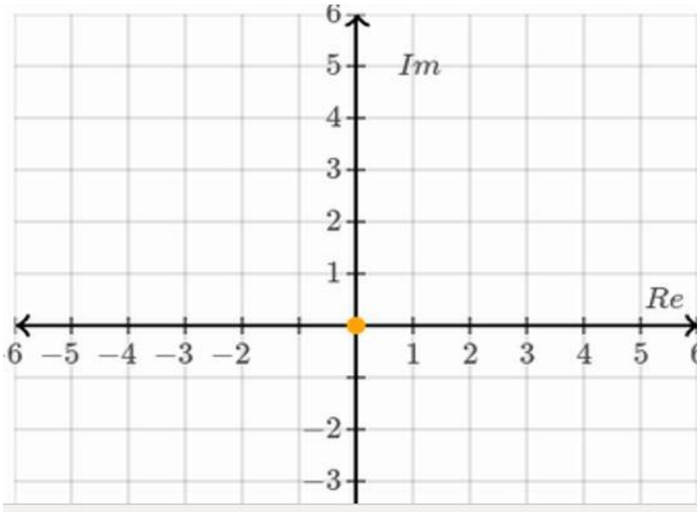


Definition: Die Zahl $\bar{z} = a - bi$ bezeichnet man als konjugiert komplexe Zahl zu

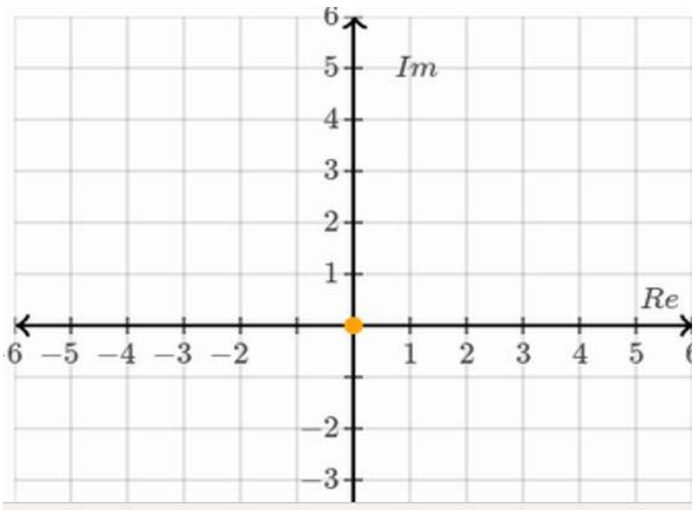
$$\bar{z} = a + bi$$

Gegeben sind zwei komplexe Zahlen z_1=6-2i und z_2=4+3i.
Ermittle a) $z_1 \cdot z_2$ b) $\frac{z_1}{z_2}$ rechnerisch und grafisch.

a)



b)



Quadratische Geichungen in $\mathbb{C}$

Mit Hilfe der komplexen Zahlen lassen sich nun alle quadratischen Gleichungen lösen. Die bekannten Lösungsformeln gelten auch für in $\mathbb{C}$. Auch die Satzgruppe von Vieta ist weiterhin gültig.

Beispiel: $x^2 + 4x + 13 = 0$

Unter Verwendung der kleinen Lösungsformel mit p = 4 und q = 13

$$x_{1,2} = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - 13} = -2 \pm \sqrt{-9} = -2 \pm 3i$$

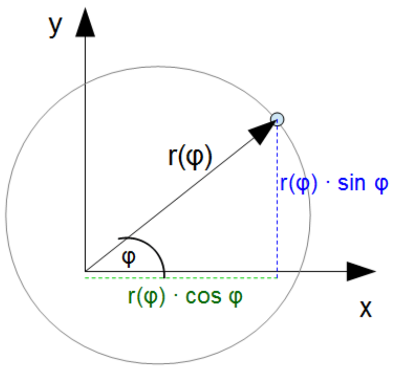
Die beiden Lösungen lauten: $x_1 = -2 + 3i, x_2 = -2 - 3i$

Vieta:

$$\begin{aligned}(x - x_1) \cdot (x - x_2) &= \big(x - (-2 + 3i)\big) \cdot \big(x - (-2 - 3i)\big) \\ &= (x + 2 - 3i)(x + 2 + 3i) \\ &= x^2 + 2x + 3xi + 2x + 4 + 6 \cdot i - 3xi - 6 \cdot i - 9 \cdot i^2 \\ &= x^2 + 4x + 13\end{aligned}$$

Polarkoordinaten

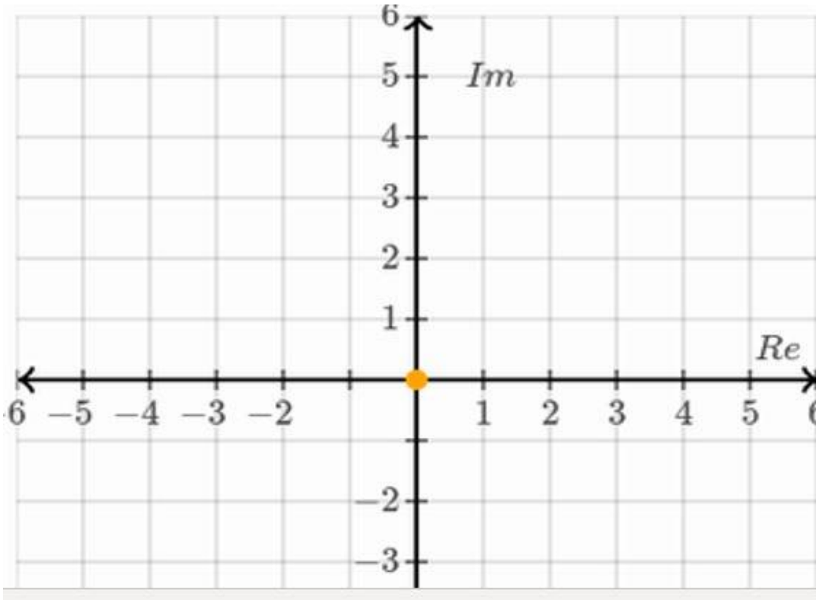
Jede komplexe Zahl entspricht in der Gauß'schen Zahlenebene der Punkt = (a I b). Dieser Punkt lässt sich auch durch seine Polarkoordinaten P = [r; φ] beschreiben. Man gibt daher die komplexen Zahlen gerne in der Polarform $z = r \cdot (cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi)$ an



Umrechnung in Polarkoordinaten: tan $\varphi = \frac{Ak}{Gk} = \frac{Im}{Re}$

$$r = |z| = \sqrt{Im^2 + Re^{\,2}}$$

Stelle die komplexe Zahl z = 4 – 3i in der Polarform dar:



Potenzen und Wurzeln komplexer Zahlen

Formel von Moivre: Für $z^n = r^n \cdot (cos(n\,\varphi) + i\,sin(n\,\varphi))$

Eine komplexe Zahl ist in der Binomial- und der Polarform gegeben.

$$z = 1 + \sqrt{3}i = 2 \cdot (cos\,60^0 + i\,sin\,60^0)$$

Berechne z² a) in Binomialform und b) in Polarform

a)

b)

Definition: Eine komplexe Zahl w heißt n-te Wurzeleiner komplexen Zahl z, wenn $w^n = z$ ist.

$w = \sqrt[n]{z}$ n Möglichkeiten

$\sqrt[n]{r;\varphi} = \left(\sqrt[n]{r}, \frac{\varphi + k \cdot 360^0}{n}\right)$ -

z.B. $\sqrt[3]{30; 332{,}60°} = \left(\sqrt[3]{30}, \frac{332{,}60° + k \cdot 360^0}{3}\right)$

$L_1 = \{(3{,}107; 110{,}86°)\}$
$L_2 = \{(3{,}107; 230{,}86°)\}$
$L_3 = \{(3{,}107; 350{,}86°)\}$

Viel Spaß beim Lernen !!