Bruchgleichung

Eine Gleichung, bei der die Unbekannte im Nenner eines Bruches vorkommt, heißt Bruchgleichung.

Was ist daran so besonderes? – Wir haben ja schon Gleichungen mit Brüchen kennen gelernt, allerdings nur mit Zahlen als Nenner.

Der wesentliche Unterschied besteht darin, dass jetzt angegeben werden muss, welche Zahlen man für das Lösen der Gleichung verwenden darf, ohne dass der „Unfall“ **DIVISION DURCH NULL** stattfindet.

Daher muss man zuerst die DEFINITIONSMENGE aller Zahlen bestimmen, die als mögliche Lösung für die Gleichung in Frage kommen.

Beispiel: Bestimme die Definitionsmenge und löse die folgende Gleichung: $\frac{1}{x-2} + \frac{3}{2} = 5$

Lösung: Wann wird x−2 = 0 ? Im Falle x=2 natürlich, also müssen wir **D: x ≠ 2 als Definitionsmenge** angeben, das kann auch genauer so erfolgen: **D=**$\mathbb{R}\backslash\{2\}$ – was übersetzt heißt:
Die Definitionsmenge ist die Menge aller reellen Zahlen ohne 2

Nun zur Lösung der Gleichung:

$\frac{1}{x-2} + \frac{3}{2} = 5$	$\mid -\frac{3}{2}$
$\frac{1}{x-2} = 3{,}5$	$\mid \cdot(x-2)$
$1 = 3{,}5\cdot(x-2)$	| ausmultiplizieren
$1 = 3{,}5x - 7$	|+7
$8 = 3{,}5x$	| : 3,5
2,29 = x	

Ein letzter Blick auf die Definitionsmenge zeigt, dass die Lösung möglich ist und das wird dokumentiert mit der Angabe der Lösung als Lösungsmenge: **L = {2,29}**

Übungen:

Bestimme die Definitionsmenge und löse die folgenden Gleichungen

1) $\frac{1}{x} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$
2) $\frac{4}{5} - \frac{1}{x-1} = 1$
3) $\frac{11}{10} = \frac{1}{a+10} + \frac{3}{5}$
4) (*) $\frac{1}{x} = \frac{5}{2x} - \frac{6}{4x}$
5) $\frac{1}{y-1} - \frac{7}{4} = -\frac{13}{y-1}$
6) $\frac{7}{6} - \frac{1}{z+5} = \frac{2}{z+5} + \frac{1}{6}$
7) (*) $\frac{1}{2x-4} = \frac{14}{7} - \frac{22}{11}$
8) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} = \frac{3}{x+1} - \frac{5}{6}$

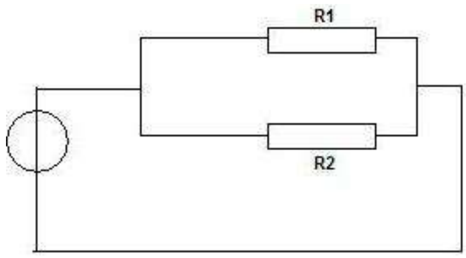
Lösungen:

1) D = $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ L = $\{4\}$
2) D = $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ L = $\{-4\}$
3) D = $\mathbb{R} \setminus \{-10\}$ L = $\{-8\}$
4) D = $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ L = $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (wahre Aussage)
5) D = $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ L = $\{9\}$
6) D = $\mathbb{R} \setminus \{-5\}$ L = $\{-2\}$
7) D = $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ L = $\{\}$ (falsche Aussage)
8) D = $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ L = $\{\frac{1}{5}\}$

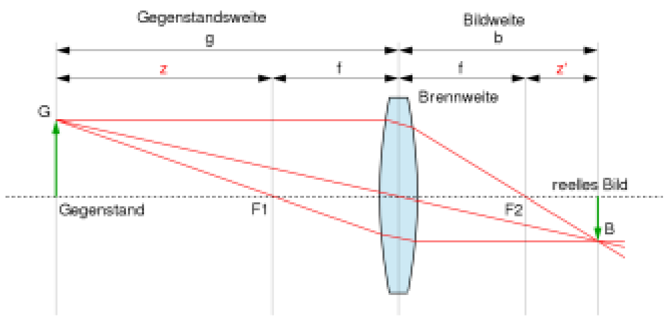
Anwendungen:

9) Ein Schwimmbad wird mit zwei Leitungen gefüllt. Ist eine Leitung allein offen, so dauert die Füllung 8 Stunden, sind beide Leitungen offen, so dauert die Füllung 4,8 Stunden. Wie lange dauert die Füllung, wenn nur die 2.Leitung offen ist?

10) Die Addition von parallel geschalteten Widerständen R1 und R2 zum Gesamtwiderstand R erfolgt mit der Formel: $\frac{1}{R1} + \frac{1}{R2} = \frac{1}{R}$. Es ist bekannt, dass R1 = 25 Ohm ist und R = 18,75 Ohm. Wie groß ist R2?



11) Die Linsengleichung der Optik lautet $\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$. g ist die Gegenstandsweite, b ist die Bildweite und f ist die Brennweite. Man kennt g = 2 m und f = 0,1 m. Wie groß ist die Bildweite b ?



Lösungen:

9) Gleichung: $\frac{1}{8} \cdot 4{,}8 + \frac{1}{t} \cdot 4{,}8 = 1$ ➔ t= 12 Stunden

10) R2 = 75 Ohm

11) b = 0,095 m