Komplexe Zahlen:

Eine kompakte Einführung zu den komplexen Zahlen finden Sie auf
http://members.chello.at/gut.jutta.gerhard/kurs/komplex1.htm und
http://members.chello.at/gut.jutta.gerhard/kurs/komplex2.htm.
Die komplexe Exponentialfunktion können Sie auslassen.

Eine umfassende Darstellung der komplexen Zahlen inkl. einiger Beispiele finden Sie auch auf http://de.wikipedia.org/wiki/Komplexe_Zahlen (dort gibt es auch ein Kapitel „Geschichtliches", in dem beschrieben wird, wie es dazu kam, dass die Komplexen Zahlen er- bzw. gefunden wurden) und http://de.wikibooks.org/wiki/Komplexe_Zahlen !

Versuchen Sie mit Hilfe der Theorie von oben folgende Tabelle auszufüllen:

Fragen	**Beantworten Sie …**
Wie sind die komplexen Zahlen definiert worden? Warum war es überhaupt nötig, die komplexen Zahlen einzuführen?	
Was ist der Real-, was der Imaginärteil einer komplexen Zahl?	Was ist der Real-, was der Imaginärteil von 4 – 3i ?
Was sind imaginäre Zahlen?	
Was sind konjungiert komplexe Zahlen?	Wie lautet die konjungiert komplexe Zahl zu -4 + 3i ?
Wie werden komplexe Zahlen addiert?	Addieren Sie (2 + 4i) und (-1 – ½i)
Wie werden komplexe Zahlen subtrahiert?	Subtrahieren Sie (2 + 4i) von (-1 – ½i)
Wie werden komplexe Zahlen multipliziert?	Multiplizieren Sie (2 + 4i) mit (-1 – ½i)
Wie werden komplexe Zahlen dividiert?	Dividieren Sie (2 + 4i) durch (-1 – i)
Wie werden komplexe Zahlen potenziert?	Berechnen Sie $(2 - 2i)^3$
Wie werden komplexe Zahlen radiziert?	Berechnen Sie $\sqrt{24-10i}$
Können Sie kompliziertere Gleichungen lösen, die zu komplexen Lösungen führen?	Lösen Sie in C die folgenden Gleichungen: $(3 + 2x)^2 = (2 + x) \,.\, (9x - 6) + 146$ $(3x - 1)^2 - (2x - 3) \,.\, (2x + 3) = 17 - (6 - 2x)^2$ $\frac{x-1}{x+2} + \frac{x-3}{x-2} = \frac{x^2+6x-33}{x^2-4}$
Können Sie komplexe Zahlen, die in der Normalform gegeben sind, in der Gauß'schen Zahlenebene darstellen?	Zeichnen Sie 4 + 2i im Koordinatensystem ein!
Können Sie komplexe Zahlen, die in der trigonometrischen Form gegeben sind, in der Gauß'schen Zahlenebene darstellen?	Zeichnen Sie 2.(cos45° + i.sin45°) im Koordinatensystem ein!

Können Sie zwischen verschiednen Darstellungen umrechnen?	z=(-3/-5) Ges.: Polarkoordinatendarstellung z=(5, 220°) Ges.: Normalform
Können Sie komplexe Zahlen, die in der Polarkoordinatendarstellung gegeben sind, multiplizieren?	z_1=(5, 320°), z_2=(4, 120°) Berechnen Sie $z_1 . z_2$
Können Sie komplexe Zahlen, die in der Polarkoordinatendarstellung gegeben sind, dividieren?	z_1=(5, 320°), z_2=(4, 120°) Berechnen Sie $z_1 : z_2$
Können Sie komplexe Zahlen, die in der Polarkoordinatendarstellung gegeben sind, potenzieren?	z=(4, 120°) Berechnen Sie z^3
Können Sie komplexe Zahlen, die in der Polarkoordinatendarstellung gegeben sind, radizieren? Wie viele Lösungen hat eine n-te Wurzel in C?	z=(4, 120°) Berechnen Sie $\sqrt[4]{z}$. Wie viele Lösungen müssen Sie finden?

Hier kommen Sie zu den Lösungen.

Hier geht es weiter zum Lernpfad „Algebraische Gleichungen höherer Ordnung“

Hier finden sie eine Lernzielüberprüfung zu den Lernpfaden „Komplexe Zahlen“ und „Algebraische Gleichungen höherer Ordnung“.

http://www.2bw.eu/workroom/inhalte/mathematik.htm führt zurück auf die Lernpfad-Übersicht-Seite.

Lösungen:

Fragen	**Beantworten Sie …**
Wie sind die komplexen Zahlen definiert worden? Warum war es überhaupt nötig, die komplexen Zahlen einzuführen?	Beispielsweise die Gleichung $x^2 = -4$ hat in R keine Lösung. Durch einen kleinen Trick (i^2 wird als -1 definiert) kann nun geschrieben werden $x^2=4.(-1)$ bzw. $x^2=4i^2$ und wenn ich nun die Wurzel ziehe, erhalte ich $x=2i$ als eine Lösung ($x=-2i$ ist die 2. Lösung). Ein anderes Beispiel: Die Lösung der quadratischen Gleichung $x^2+4x+13=0$ führt zu ${}_1x_2 = -2 \pm \sqrt{4-13} = -2 \pm \sqrt{-9} = -2 \pm 3i$ Und damit sind wir bei der allgemeinen Definition der komplexen Zahlen: Diese sind von der Form a + b.i, wobei a und b reelle Zahlen sind und $i^2=-1$. a… Realteil, b … Imaginärteil, i … imaginäre Einheit
Was ist der Real-, was der Imaginärteil einer komplexen Zahl?	Was ist der Real-, was der Imaginärteil von 4 – 3i ? Der Realteil lautet 4, der Imaginärteil -3.
Was sind imaginäre Zahlen?	Imaginäre Zahlen sind Zahlen der Form b.i (d.h.: der Realteil ist 0) Beispiel: 3i oder -2i oder 15,3i sind imaginäre Zahlen Reelle Zahlen können also als komplexe Zahlen gesehen werden, deren Imaginärteil 0 ist.
Was sind konjungiert komplexe Zahlen?	Die konjungiert komplexe Zahl zu -4 + 3i lautet -4 – 3i, allgemein: die konjungiert komplexe Zahl zu a + b.i lautet a – b.i
Wie werden komplexe Zahlen addiert?	Die Realteile werden addiert und die Imaginärteile werden addiert: (2 + 4i) + (-1 – ½i) = 1 + 3,5i
Wie werden komplexe Zahlen subtrahiert?	Die Realteile werden subtrahiert und die Imaginärteile werden subtrahiert: (-1 – ½i) – (2 + 4i) = -3 – 4,5i
Wie werden komplexe Zahlen multipliziert?	So wie Binome multipliziert werden. Denken Sie daran i^2 durch -1 zu ersetzen! $(2 + 4i) . (-1 - \frac{1}{2}i) = -2 - 4i - i - 2i^2 = -2 - 5i + 2 = -5i$
Wie werden komplexe Zahlen dividiert?	Indem Nenner und Zähler mit der zum Nenner konjungiert komplexen Zahl multipliziert werden (da $(a+bi).(a-bi)=a^2-b^2i^2=a^2+b^2$ → der Nenner wird reell): $\frac{2+4i}{-1-i} = \frac{(2+4i).(-1+i)}{(-1-i).(-1+i)} = \frac{-2-4i+2i+4i^2}{1-i^2} = \frac{-6-2i}{2} = -3-i$
Wie werden komplexe Zahlen potenziert?	Wie Binome potenziert werden [kann schnell kompliziert werden, daher nur ein relativ einfaches Beispiel; leichter wird es, wenn die komplexe Zahl erst in die trigonometrische Darstellung gebracht und dann potenziert wird – s. weiter unten]: $(2-2i)^3 = (2-2i)^2.(2-2i) = (4 - 8i + 4i^2).(2-2i) = -8i.(2-2i) =$ $-16i + 16i^2 = -16 - 16i$

Wie werden komplexe Zahlen radiziert?	Das ist relativ kompliziert und braucht einen Trick (leichter wird es, wenn die komplexe Zahl erst in die trigonometrische Darstellung gebracht und dann Wurzel gezogen wird – s. weiter unten): Gesucht: $\sqrt{24-10i}$. Wir gehen davon aus, dass das Ergebnis wieder eine komplexe Zahl ist und setzen daher ganz allgemein an $\sqrt{24-10i} = a + bi$ | quadrieren $24 - 10i = a^2 + 2abi + b^2i^2$ | i^2 durch -1 ersetzen $24 - 10i = a^2 + 2abi - b^2$ | die Real- und die Imaginärteile gleichsetzen, ergibt 2 Gleichungen I $24 = a^2 - b^2$ II $-10i = 2abi \rightarrow a = -\frac{5}{b}$ Nun setze ich II in I ein → $24 = \left(-\frac{5}{b}\right)^2 - b^2$ Aufgelöst und mit b^2 multipliziert, ergibt das: $24b^2 = 25 - b^4$ bzw. $b^4 + 24b^2 - 25 = 0$ Das ist eine biquadratisch Gleichung und beim Lösen erhalte ich $b^2 = -12 \pm \sqrt{144+25} = -12 \pm 13$ → $b^2 = -25$ oder $b^2 = 1$ Da b eine *reelle* Zahl sein muss, kommt $b^2 = -25$ als Lösung nicht in Frage (die Wurzel aus -25 führt ja zu einer komplexen Zahl). $b^2 = 1$ bringt allerdings zwei Lösungen, nämlich $b_1 = 1$ und $b_2 = -1$. Nun berechne ich die zugehörigen a aus $a = -\frac{5}{b}$ → $a_1 = -5$ und $a_2 = 5$. Und damit sind wir bei der Antwort auf die Frage, wie die Wurzel aus 24 – 10i lautet: $\sqrt{24-10i} = -5 + i$ oder $5 - i$. Zur <u>Probe</u> können Sie -5 + i quadrieren: $(-5 + i)^2 = 25 - 10i + i^2 = 25 - 10i - 1 = 24 - 10i$ passt
Können Sie kompliziertere Gleichungen lösen, die zu komplexen Lösungen führen?	Lösen Sie in C: $(3 + 2x)^2 = (2 + x) . (9x - 6) + 146$ $9 + 12x + 4x^2 = 18x + 9x^2 - 12 - 6x + 146$ $5x^2 = -125$ | :5 $x^2 = -25$ | Wurzelziehen $x = \pm 5i$ Ich mache noch die Probe für x = 5i → $(3 + 10i)^2 = (2 + 5i).(45i - 6) + 146$ $9 + 60i + 100i^2 = 90i + 225i^2 - 12 - 30i + 146$ | i^2 durch -1 ersetzen $60i - 91 = 60i - 91$ w.A.

Lösen Sie in C:

$(3x - 1)^2 - (2x - 3) . (2x + 3) = 17 - (6 - 2x)^2$

$9x^2 - 6x + 1 - 4x^2 + 9 = 17 - 36 + 24x - 4x^2$

$9x^2 - 30x + 29 = 0$ | Quadratische Gleichung lösen

$$_1x_2 = \frac{30 \pm \sqrt{900 - 4.9.29}}{18} = \frac{30 \pm \sqrt{-144}}{18} = \frac{30 \pm 12i}{18} = \frac{5}{3} \pm \frac{2}{3}i$$

Hier ist die Probe schon etwas mühsamer.

Ich mache die Probe für x = $\frac{5}{3} + \frac{2}{3}i$ →

$$(5 + 2i - 1)^2 - (\frac{10}{3} + \frac{4}{3}i - 3).(\frac{10}{3} + \frac{4}{3}i + 3) = 17 - (6 - \frac{10}{3} - \frac{4}{3}i)^2$$

$$(4 + 2i)^2 - (\frac{1}{3} + \frac{4}{3}i).(\frac{19}{3} + \frac{4}{3}i) = 17 - (\frac{8}{3} - \frac{4}{3}i)^2 \qquad | \; i^2 = -1$$

$$16 + 16i - 4 - (\frac{19}{9} + \frac{76}{9}i + \frac{4}{9}i - \frac{16}{9}) = 17 - (\frac{64}{9} - \frac{64}{9}i - \frac{16}{9}) \qquad | \; .9$$

$144 + 144i - 36 - 19 - 76i - 4i + 16 = 153 - 64 + 64i + 16$

$105 + 64i = 105 + 64i$ w.A.

Lösen Sie in C:

$$\frac{x-1}{x+2} + \frac{x-3}{x-2} = \frac{x^2 + 6x - 33}{x^2 - 4}$$

$$\frac{x-1}{x+2} + \frac{x-3}{x-2} = \frac{x^2 + 6x - 33}{(x+2).(x-2)} \qquad | \; .(x+2).(x-2)$$

$(x-1).(x-2) + (x-3).(x+2) = x^2 + 6x - 33$

$x^2 - x - 2x + 2 + x^2 - 3x + 2x - 6 = x^2 + 6x - 33$

$x^2 - 10x + 29 = 0$

$_1x_2 = 5 \pm \sqrt{25 - 29}$ → $_1x_2 = 5 \pm 2i$

Ich mache die Probe für x = 5 + 2i

$$\frac{4+2i}{7+2i} + \frac{2+2i}{3+2i} = \frac{(5+2i)^2 + 30 + 12i - 33}{(5+2i)^2 - 4} \qquad | \; i^2 = -1$$

$$\frac{(4+2i).(7-2i)}{(7+2i).(7-2i)} + \frac{(2+2i).(3-2i)}{(3+2i).(3-2i)} = \frac{25 + 20i + 30 + 12i - 33}{25 + 20i - 4 - 4}$$

$$\frac{(4+2i).(7-2i)}{49+4} + \frac{(2+2i).(3-2i)}{9+4} = \frac{18 + 32i}{17 + 20i}$$

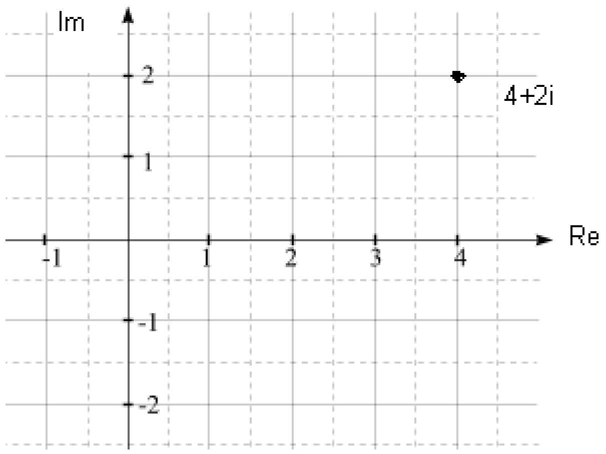
$$\frac{32+6i}{53} + \frac{10+2i}{13} = \frac{(18+32i).(17-20i)}{289+400} \qquad | \; .53.13$$

$416 + 78i + 530 + 106i = 946 + 184i$

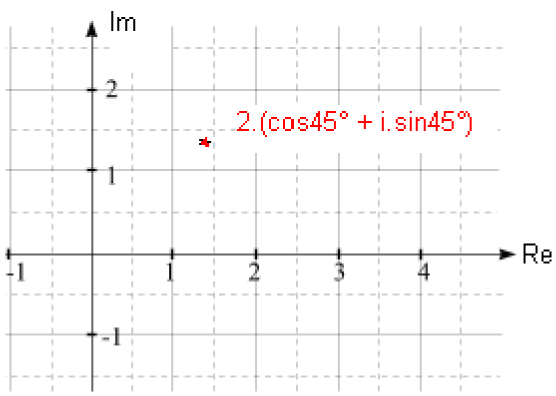
$946 + 184i = 946 + 184i$ w.A.

<table>
<tr><td>Können Sie komplexe Zahlen, die in der Normalform gegeben sind, in der Gauß’schen Zahlenebene darstellen?</td><td>Zeichnen Sie 4 + 2i im Koordinatensystem ein!

Ich zeichne den Punkt mit Realteil 4 auf der x-Achse und Imaginärteil 2 auf der y-Achse ein. Dort, wo ich lande, liegt die gegebene komplexe Zahl.


</td></tr>
<tr><td>Können Sie komplexe Zahlen, die in der trigonometrischen Form gegeben sind, in der Gauß’schen Zahlenebene darstellen?</td><td>Zeichnen Sie 2.(cos45° + i.sin45°) im Koordinatensystem ein!

Ich zeichne einen Winkel von 45° und einen Radius von 2 Einheiten. Dort, wo ich lande, liegt die gegebene komplexe Zahl.


</td></tr>
<tr><td>Können Sie zwischen verschiednen Darstellungen umrechnen?</td><td>z=(-3/-5) Ges.: Polarkoordinatendarstellung

r = $\sqrt{a^2+b^2}$ → r = $\sqrt{(-3)^2+(-5)^2} = \sqrt{34} \approx 5{,}8$

tanφ = $\frac{b}{a}$ → tanφ = $\frac{-5}{-3}$ → φ≈59° Dies kann aber noch nicht die richtige Lösung sein, da (-3/-5) im 3. Quadranten liegt. Ich brauche daher den Winkel, der zu tanφ = $\frac{-5}{-3}$ führt und das ist 180° + φ → der gesuchte Winkel ist ca. 239°.

Die Polarkoordinatendarstellung von z=(-3/-5) lautet (5,8/239°)

z=(5, 220°) Ges.: Normalform

a = r.cosφ → a = 5. cos220° ≈ -3,8

b = r.sinφ → b = 5. sin220° ≈ -3,2

Die Normalform von z=(5, 220°) lautet -3,8 – 3,2i</td></tr>
</table>

Können Sie komplexe Zahlen, die in der Polarkoordinatendarstellung gegeben sind, multiplizieren?	$z_1=(5, 320°)$, $z_2=(4, 120°)$ Berechnen Sie $z_1 . z_2$ $z_1 . z_2 = (r_1 . r_2; \varphi_1 + \varphi_2) = (20; 440°) = (20; 80°)$ Der Winkel im Ergebnis sollte zwischen 0° und 360° liegen → 440° werden durch 80° ersetzt, indem von 440° eine ganze Umdrehung (=360°) abgezogen wird.
Können Sie komplexe Zahlen, die in der Polarkoordinatendarstellung gegeben sind, dividieren?	$z_1=(5, 320°)$, $z_2=(4, 120°)$ Berechnen Sie $z_1 : z_2$ $z_1 : z_2 = (r_1 : r_2; \varphi_1 - \varphi_2) = (1{,}25; 200°)$
Können Sie komplexe Zahlen, die in der Polarkoordinatendarstellung gegeben sind, potenzieren?	$z=(4, 120°)$ Berechnen Sie z^3 $z^n = (r^n; n.\varphi) = (4^3; 3.120°) = (64; 360°) = (64; 0°)$
Können Sie komplexe Zahlen, die in der Polarkoordinatendarstellung gegeben sind, radizieren? Wie viele Lösungen hat eine n-te Wurzel in C?	$z=(4, 120°)$ Berechnen Sie $\sqrt[4]{z}$. Wie viele Lösungen müssen Sie finden? Es gibt 4 Lösungen: Die erste finde ich über $\sqrt[n]{z} = \left(\sqrt[n]{r}; \frac{\varphi}{n}\right)$ → $\sqrt[4]{(4,120°)} = \left(\sqrt[4]{4}; \frac{120}{4}\right) = (1{,}4; 30°)$ 1. Lösung Die weiteren Lösungen unterscheiden sich nur in den Winkeln: 2. Lösung: $\sqrt[4]{(4,120°)} = \left(\sqrt[4]{4}; \frac{120+360}{4}\right) = (1{,}4; 120°)$ 3. Lösung: $\sqrt[4]{(4,120°)} = \left(\sqrt[4]{4}; \frac{120+2.360}{4}\right) = (1{,}4; 210°)$ 4. Lösung: $\sqrt[4]{(4,120°)} = \left(\sqrt[4]{4}; \frac{120+3.360}{4}\right) = (1{,}4; 300°)$ Die nächste Lösung wäre (1,4; 390°) und kann bereits wieder zu (1,4; 30°) vereinfacht werden und das ist wieder die 1. Lösung.

Zurück zur Tabelle

Hier geht es weiter zum Lernpfad „Algebraische Gleichungen höherer Ordnung“

Hier finden sie eine Lernzielüberprüfung zu den Lernpfaden „Komplexe Zahlen“ und „Algebraische Gleichungen höherer Ordnung“.

http://www.2bw.eu/workroom/inhalte/mathematik.htm führt zurück auf die Lernpfad-Übersicht-Seite.