Dr. Manfred Gurtner 2021

Wahrscheinlichkeitsrechnung 2 − Kombinatorik + Binomialverteilung:

Die **Kombinatorik** beschäftigt sich mit der Bestimmung der **Anzahl von Möglichkeiten** Dinge in beliebiger Reihenfolge zu platzieren (Permutationen und Kombinationen)

Beispiel 1:
Wie viele Sitzmöglichkeiten haben 4 Personen, wenn sie auf 4 Plätzen in beliebiger Reihenfolge sitzen sollen?

Lösung:
Die 4 Personen nennen wir Anton, Berta, Cecilie, Dora, kurz A,B,C,D.
Dann können wir die möglichen Sitzreihenfolgen so aufschreiben:

AB-CD **AB**-DC AC-BD AC-DB AD-BC AD-CB
BA-CD BA-DC BC-AD BC-DA BD-AC BD-CA
CA-BD CA-DB CB-AD CB-DA CD-AB CD-BA
DA-BC DA-CB DB-AC DB-CA DC-AB **DC-BA**

Also sind es 4·6=24 Möglichkeiten!
Das ist eher sehr umständlich. Wie könnte man das auf eine Formel bringen?

Wir setzen auf den 1.Platz eine von 4 Personen. Dann setzen wir auf den 2.Platz eine von nunmehr 3 verbliebenen Personen, auf den 3.Platz setzen wir eine von 2 Personen, am letzten Platz nimmt die letzte Person Platz. Wir haben also **4·3·2·1 Möglichkeiten** für die Platzvergabe.

Platz 1	Platz 2	Platz 3	Platz 4
4 Personen möglich	3 Personen möglich	2 Personen möglich	1 Person möglich

Die Anzahl der <u>Platzvertauschungen</u> (<u>Permutationen</u>) ist bei n Personen und n Plätzen: Permutation (n,n) = n·(n–1)·(n–2)·(n–3)·...·2·1 = <u>n !</u>
(<u>n-Faktorielle</u> oder <u>n-Fakultät</u>)

Beispiel 2:
Wie viele Fahnen können aus den 5 Farben weiß, rot, gold, grün und blau gemacht werden, wenn eine Fahne aus drei Farben in einer bestimmten Reihenfolge (von oben nach unten) besteht und keine Farbe doppelt vorkommt?

Lösung:
Jetzt sind nur 3 Farben von 5 Farben auszuwählen. Also gilt die obige Formel nicht mehr. Auf den ersten Platz der Fahne kann man 5 Farben geben, auf den 2.Platz kann man dann nur mehr 4 Farben wählen, am dritten Platz nur mehr 3. Da man das unabhängig voneinander machen kann, sind es **5·4·3 = 60** Möglichkeiten

Die Anzahl der <u>Platzvertauschungen</u> (<u>Variationen</u>) ist bei n Personen und k Plätzen: Permutation(n,k) = n·(n–1)·(n–2)·(n–3)·...·(n–k+1) = $\frac{n!}{(n-k)!}$

Beispiel 3:
Wie viele Teams aus 3 Personen kann man aus einer Gruppe von 6 Personen machen?

Lösung:
Die Personen mögen A,B,C,D,E,F heißen, dann gibt es folgende Teams:

ABC ABD ABE ABF BCD BCE BDF CDE CDF DEF
ACD ACE ACF BDE BDF CEF
ADE ADF BEF
AEF

Das heißt, es gibt 20 mögliche Teams

Die Anzahl der Teams (Kombinationen) mit k Personen, die man aus n Personen bilden kann, sind:

Kombination (n,k) = $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{P(n,k)}{k!}$ **das ist der BINOMIALKOEFFIZIENT**

Beweis: Wenn man alle Variationen von n Personen auf k Plätzen ansieht, so gibt es z.B. die Platzverteilungen: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA, die alle mit denselben Personen gebildet werden. Die Anzahl dieser Platzvertauschungen ist k!, also gibt es um k! mal mehr Platzvertauschungen als Teambildungen.

Beispiel 4:
Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Buchstaben AABBB zu Wörtern zu formen, die alle verschieden sind ?

Lösung:
Hier kann man zuerst wieder probieren:
AABBB, ABABB, ABBAB, ABBBA, BAABB, BABAB, BABBA, BBAAB, BBABA, BBBAA
Das ergibt 4+3+2+1 = 10 Möglichkeiten
Wörter mit 5 Buchstaben ergeben 5! = 5·4·3·2.1 = 120 Möglichkeiten. Identifiziert man A,B mit A und C,D,E mit B, dann erhält man die obigen Wörter. Daher muss man durch die Vertauschungsmöglichkeiten von A,B und die Vertauschungsmöglichkeiten von C,D,E dividieren:
$\frac{5!}{2! \cdot 3!} = \binom{5}{2} = \binom{5}{3}$ das ist schon wieder der BINOMIALKOEFFIZIENT!

Die Anzahl der Vertauschungsmöglichkeiten von n Buchstaben, wobei k gleich sind (z.B. A) und n−k ebenfalls gleich sind (z.B: B) sind:
$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{P(n,k)}{k!}$ **das ist der BINOMIALKOEFFIZIENT**

EINGABE im TASCHENRECHNER TI−30:

Permutation:	10!	➔ mit: 10 $\boxed{\text{PBR}}$ > > $\boxed{!}$ = =	**3628800**
Variation:	10!/(10−3)!	➔ mit: 10 $\boxed{\text{PRB}}$ $\boxed{\text{nPr}}$ 3 =	**720**
Kombination:	$\binom{10}{3}$	➔ mit: 10 $\boxed{\text{PRB}}$ > $\boxed{\text{nCr}}$ 3 =	**120**

Übungen:

1) Wie viele Möglichkeiten hat ein Teamcoach, die Reihenfolge der 5 Torschützen bei einem Fußball−Elfmeterschießen zu bestimmen?
2) Wie viele verschiedene (meist sinnlose) Wörter kann man durch Vertauschen der Buchstaben des Wortes GEBURT bilden?
3) Wie viele vierstellige Zahlen mit vier **verschiedenen** von 10 möglichen Ziffern gibt es? (0 am Beginn ist erlaubt)
4) In einer Herberge sind 8 Zimmer frei und es kommen 5 Wanderer. Wie viele Verteilungsmöglichkeiten der Zimmer(−schlüssel) auf die Wanderer gibt es?
5) An einem Wettbewerb nehmen 10 Leute teil. Wie viele Möglichkeiten für das Siegespodest (1.2.und 3.Platz) gibt es?
6) Wie viele Möglichkeiten gibt es beim Lotto 6 aus 45?
7) Wie viele Möglichkeiten gibt es, ein Verhandlungsteam aus 3 Personen zu bilden, wenn 12 Personen dafür in Frage kommen?
8) Beim Schnapsen−Spiel bekommt ein Spieler ein „Blatt“ aus 5 Karten von insgesamt 20 Karten. Wie viele verschiedene „Blätter“ kann ein Spieler bekommen?

9) Bei einer Prüfung sind 10 Fragen zu beantworten. Das Prüfungsergebnis ist positiv, wenn mindestens 8 Fragen richtig beantwortet werden.
Wie viele Möglichkeiten gibt es a) genau 8, b) genau 9, c) alle Fragen richtig zu beantworten?

10) Wie oft schütteln sich 8 Personen die Hände (oder stoßen mit Gläsern an)?

11) Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Bildung von verschiedenen Zahlen aus folgenden fünf Ziffern:
a) wenn man die Ziffern 1,2,3,4,5 verwendet?
b) wenn man die Ziffern 2,2,5,5,5 verwendet?
c) wenn man die Ziffern 1,4,4,4,4 verwendet?

12) Morsezeichen werden aus den Zeichen „·" und „–„ gebildet. Wie viele „Wörter" lassen sich daraus darstellen, wenn genau die 5 Zeichen …– – verwendet werden?

BINOMIALVERTEILUNG:

Thema dieses Kapitels ist der **wiederholte Versuch des Ziehens** von Kugeln aus einer Urne **mit Zurücklegen**.
Allgemein: Ein n–mal wiederholter Versuch mit genau 2 Ausgängen (Treffer/Niete…) – das erklärt das BI – und mit immer gleicher Wahrscheinlichkeit für den Treffer!
Das lässt sich mit Baumdiagrammen auch gut nachvollziehen (siehe 3.), nur wird es bei vielen Münzwürfen zu schwierig zu einer Wahrscheinlichkeit zu kommen, deshalb wollen wir uns jetzt um die Formel für dieses Ereignis bemühen:

$$\boxed{P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k q^{n-k}}$$

Hier bedeutet:

P ist die Wahrscheinlichkeit bei allen n Münzwürfen k positive Würfe ("TREFFER") zu bekommen (englisch: probability, daher kommt der Buchstabe P)

X ist das gesuchte Ereignis ("TREFFER")

k ist die Anzahl der **positiven** Ausgänge der Versuche (= Anzahl von "TREFFER")

n ist die Anzahl der Versuche

p ist die Wahrscheinlichkeit für "TREFFER" bei einem einzelnen Versuch

q = 1–p ist die Gegenwahrscheinlichkeit zu p, also die Wahrscheinlichkeit für "NIETE" bei einem einzelnen Münzwurf

$\binom{n}{k}$ ist der Binomialkoeffizient, den man am schnellsten mit n **PRB → nCr** k beim Taschenrechner TI-30X II erreicht.

Beispiel 5:
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit beim Würfeln mit 5 Würfeln genau zwei „6"er zu bekommen? (oder: mit einem Würfel zweimal „6" zu bekommen – bei 5 mal würfeln)

Lösung:
Zuerst prüfen wir die Voraussetzungen der Binomialverteilung:
– es gibt 2 Möglichkeiten: „6" oder „nicht 6" zu werfen (Bi–)
– jedes Mal ist die Wahrscheinlichkeit für „6" die gleiche, nämlich p = 1/6

dann ist n=5 (Anzahl der Versuche) und k=2 (günstige Ausgänge)
$P(X=2) = \binom{5}{2}\cdot (1/6)^2\,(1-1/6)^{(5-2)} = 0{,}16075$ = **16,1 %**

Übungen:

13) Man würfelt mit einem gewöhnlichen Würfel 5-mal. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass
a) genau 3mal „6“ kommt b) genau 4mal „6“ kommt c) genau 5mal „6“ kommt
d) mindestens 3mal „6“ kommt e) höchstens 1mal „6“ kommt

14) Ein Spielautomat verspricht in 30% der Fälle einen Gewinn. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man von 10 Spielen a) genau 2mal gewinnt b) genau 3mal gewinnt
c) genau 4mal gewinnt d) höchstens 2mal gewinnt e) mindestens 3mal gewinnt

15) Maya spielt an einem Roulettetisch die einfache Chance „**rouge**“ (p=18/37). Wie groß ist die Chance bei 8 Spielen a) genau 5mal zu gewinnen b) genau 6mal zu gewinnen
c) genau 4mal zu gewinnen d) zwischen 4 und 6mal zu gewinnen e) nie zu gewinnen

16) Laptops werden mit der Güte von 3% erzeugt (3% der Produktion sind beschädigt). Zur Kontrolle werden 20 Laptops überprüft. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass 0,1,2 bzw.3 davon beschädigt sind?

17) Für eine Prüfung lernt Christine die Vokabeln und kann sie mit 70% Sicherheit.
a) Wie groß ist die Chance, dass sie alle richtig hat, wenn sie 4 Vokabeln geprüft wird?
b) Wie groß ist die Chance, dass sie alle richtig hat, wenn sie 8 Vokabeln geprüft wird?
c) Wie groß ist die Chance, dass sie alle richtig hat, wenn sie 12 Vokabeln geprüft wird?

18) Eine Knabengeburt hat die Wahrscheinlichkeit von ca. 51,3%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 6 Kindern mehr als die Hälfte Buben sind?

19) In einem Buch mit 250 Seiten sind 34 Druckfehler verstreut. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Seite
a) keinen b) einen c) zwei d) mindestens 2 Druckfehler enthält?

20) Bei Flügen wird gerne überbucht, da es bei durchschnittlich 12% der Buchungen zu Stornierungen kommt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 80 Plätzen die Überbuchung mit 83 Personen gut geht, das heißt, dass von 83 gebuchten Plätzen mindestens 3 nicht in Anspruch genommen werden?

21) Kann man Parapsychologie beweisen? Bei einem Test auf Hellsehen soll der „Magier“ die Farbe der Spielkarte (Herz, Karo, Pik, Treff) nennen. Bei 10 Versuchen rät der „Magier“ 7-mal richtig. Ist das ein Beweis für die Fähigkeit des Hellsehens? Argumentiere mit der entsprechenden Wahrscheinlichkeit!

22*) Ein AIDS−Test beweist mit 99% Wahrscheinlichkeit, dass man AIDS hat. Es wird empfohlen einen zweiten Test zu machen, wenn der erste Test AIDS nachweist, da es auch sein kann, dass der erste Test mit 1% Wahrscheinlichkeit falsch ist. Wie groß ist die Chance, dass zwei AIDS−Tests falsch sind?

23) Zwei Spieler spielen mit der Spielstärke 40% und 60% gegeneinander. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der schwächere Spieler
a) 1 Spiel gewinnt? b) 2 von 5 Spielen gewinnt? c) 4 von 10 Spielen gewinnt?
d) Was bedeutet das für Spiele wie Fußball oder Tennis?

24) Ein Spieler soll mir die Symbole „Stein“ (geballte Faust), „Schere“ (Zeige− und Mittelfinger) und „Papier“ (flache Hand) zeigen und ich rate, welches Symbol kommt. Wie oft muss ich raten, damit ich mit mindestens 90%iger Wahrscheinlichkeit mindestens ein Symbol richtig errate?

25) Ein Spieler darf nach Einsatz von 8€ mit 3 Würfeln werfen und bekommt bei einem Sechser 10€, bei zwei Sechsern 25€ und bei drei Sechsern 50€ ausbezahlt. Ist das Spiel fair? Falls nicht, wie müsste der Einsatz geändert werden, damit es fair wird?

26) Beim Würfelpoker gibt es die Möglichkeit mit 5 Würfeln ein Paar aus zwei Fünfern und sonst anderen Zahlen zu werfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür? Kann man das mit der Binomialverteilung rechnen? Wenn nein, wie sonst?

weitere Übungen: 5−16 von http://juttagut.at/kurs/wahrsch2.pdf

<u>Lösungen:</u>

1) 5! = 120 Möglichkeiten
2) 6! = 720 Möglichkeiten
3) 10 **nPr** 4 = 5040 Möglichkeiten
4) 8 **nPr** 5 = 6720 Möglichkeiten
5) 10 **nPr** 3 = 720 Möglichkeiten
6) 45 **nCr** 6 = 8.145.060 Möglichkeiten
7) 12 **nCr** 3 = 220 Möglichkeiten
8) 20 **nCr** 5 = 15504 Möglichkeiten

9) a) 10 **nCr** 8 = 45 Möglichkeiten   b) 10 **nCr** 9 = 10 Möglichkeiten   c) 1 Möglichkeit
10) 8 **nCr** 2 = 28
11) a) 5! = 120   b) 5 **nCr** 2 = 10   c) 5 **nCr** 1 = 5
12) 5 **nCr** 3 = 10
nämlich: **…−− (3)   ..−.−   .−..−   −…−(=)   ..−−.   .−.−. (+)   −..−. (/)   .−−..   −.−..   −−… (7)**

13) a) 3,21%   b) 0,32%   c) 0,01%   d) 3,5%   e) 80,4%
14) a) 23,3%   b) 26,7%   c) 20%   d) 38,3%   e) 61,7%
15) a) 20,7%   b) 9,8%   c) 27,3%   d) 57,7%   e) 0,5%
16) a) P(0) = 54,4%   P(1) = 33,6%   P(2) = 9,9%   P(3) = 1,8%
17) a) 24%   b) 5,8%   c) 1,4%
18) 36,8%
19) a) n=34, p=34/250, k=0 ➔ P=0,7%   b) 3,7%   c) 9,6%   d) 95,6%
20) n=83, p=0,12 k=3..83 ➔ 1 – Gegenteil: n=83, p=0,12 k =0,1,2 ➔ 99,8%
21) Er rät mit 0,35% Wahrscheinlichkeit 7 oder mehr richtig, es ist also ein guter Hinweis aus Hellsehen   (Erwartungswert bei 10 Versuchen = ¼ *10 = 2½ richtige Versuche)
22) $0{,}01^2 = 0{,}0001 = 0{,}01\%$
23) a) 40%   b) 34,6%   c) 25,1%   d) je öfter gespielt wird, umso klarer ist der Gewinner (beim Tennis)
24) P(n mal falsch) = $(2/3)^n = 0{,}10$ ➔ n = mindestens 6 mal
25) 0,3472*10€+0,0694*25€ + 0,0046*5€ = 5,44€ und −8€ = −2,56€ Verlust. Der Einsatz müsste auf 5,44€ gesenkt werden.
26) ja, n=5, p=1/6, k=2 ➔ P=16,1%