

Gleichungssysteme mit 3 und mehr Variablen

A) Lösung mit der Eliminationsmethode

Gegeben ist das Gleichungssystem:

$$\text{I)} \quad 2x - 3y + z = -5$$

$$\text{II)} \quad x + y - 2z = 5$$

$$\text{III)} \quad \underline{3x - y + 2z = -1}$$

Jetzt sucht man eine Variable aus, deren Koeffizienten gleichgemacht werden, mit abwechselnden Vorzeichen, hier z.B.: z

$$\text{I)} \quad 2x - 3y + z = -5 \quad |*2$$

$$\text{II)} \quad x + y - 2z = 5$$

$$\text{III)} \quad \underline{3x - y + 2z = -1}$$

$$\text{I)} \quad 4x - 6y + 2z = -10$$

$$\text{II)} \quad x + y - 2z = 5$$

$$\text{III)} \quad \underline{3x - y + 2z = -1}$$

Jetzt muss man jeweils zwei Zeilen addieren:

$$\text{I)} \quad 4x - 6y + 2z = -10$$

$$\text{II)} \quad x + y - 2z = 5 \quad \rightarrow 5x - 5y = -5 \quad (1.+2.\text{Zeile})$$

$$\text{III)} \quad \underline{3x - y + 2z = -1} \quad \rightarrow \underline{4x} = 4 \quad (2.+3.\text{Zeile})$$

Dann geht es weiter mit der 3.Gleichung: $\rightarrow x = 1$

eingesetzt in Zeile I+II) : $5 \cdot 1 - 5y = -5 \rightarrow y = 2$

eingesetzt in Zeile I) : $4 \cdot 1 - 6 \cdot 2 + 2z = -10 \rightarrow z = -1$

B) Lösung mit der Einsetzungsmethode

Gegeben ist das Gleichungssystem:

$$\text{I)} \quad 2x - 3y + z = -5$$

$$\text{II)} \quad x + y - 2z = 5$$

$$\text{III)} \quad \underline{3x - y + 2z = -1}$$

Aus einer der 3 Gleichungen kann man eine Variable ausdrücken (möglichst mit 1 als Koeffizient):

$$\text{I)} \quad 2x - 3y + z = -5 \quad \rightarrow \quad z = -5 - 2x + 3y \quad (2x \text{ und } 3y \text{ auf die andere Seite bringen})$$

$$\text{II)} \quad x + y - 2z = 5$$

$$\text{III)} \quad \underline{3x - y + 2z = -1}$$

Nun ersetzt man z in den anderen 2 Gleichungen durch den rechten Ausdruck $(-5-2x+3y)$:

$$\text{I)} \quad 2x - 3y + z = -5 \quad \rightarrow \quad z = -5 - 2x + 3y$$

$$\text{II)} \quad x + y - 2z = 5 \quad \rightarrow \quad x + y - 2(-5 - 2x + 3y) = 5$$

$$\text{III)} \quad \underline{3x - y + 2z = -1} \quad \rightarrow \quad 3x - y + 2(-5 - 2x + 3y) = -1$$

Dies muss man vereinfachen und erhält ein Gleichungssystem mit 2 Variablen:

$$\text{I)} \quad z = -5 - 2x + 3y$$

$$\text{II)} \quad x + y + 10 + 4x - 6y = 5 \quad \rightarrow \quad 5x - 5y = -5 \quad (10 \text{ auf die rechte Seite bringen und zusammenfassen})$$

$$\text{III)} \quad \underline{3x - y - 10 - 4x + 6y = -1} \quad \rightarrow \quad -x + 5y = 9 \quad (10 \text{ auf die rechte Seite bringen und zusammenfassen})$$

Und damit haben wir das Gleichungssystem auf 2 Gleichungen mit 2 Variablen gebracht und durch Auflösen der Gleichung III) auf x kann man noch einmal in II) einsetzen:

$$\text{I)} \quad z = -5 - 2x + 3y$$

$$\text{II)} \quad 5x - 5y = -5$$

$$\text{III)} \quad \underline{-x + 5y = 9} \quad \rightarrow \quad x = 5y - 9$$

$$\text{I)} \quad z = -5 - 2x + 3y$$

$$\text{II)} \quad 5x - 5y = -5 \quad \rightarrow \quad 5(5y - 9) - 5y = -5 \quad \rightarrow \quad 25y - 45 - 5y = -5 \quad \rightarrow \quad 20y - 45 = -5 \quad \rightarrow \quad \underline{y=2}$$

$$\text{III)} \quad \underline{-x + 5y = 9} \quad \rightarrow \quad x = 5y - 9$$

Nun kann man die erste Lösung in die blaue (III) und dann beide in die rote (I) Gleichung einsetzen:

$$\text{I)} \quad z = -5 - 2x + 3y$$

$$\text{II)} \quad \underline{y=2}$$

$$\text{III)} \quad \underline{x = 5y - 9} \quad \rightarrow \quad x = 5 \cdot 2 - 9 \quad \rightarrow \quad \underline{x=1}$$

$$\text{I)} \quad z = -5 - 2x + 3y \quad \rightarrow \quad z = -5 - 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \quad \rightarrow \quad \underline{z=-1}$$

$$\text{II)} \quad \underline{y=2}$$

$$\text{III)} \quad \underline{x=1}$$

Damit hat man die Lösung: $L = \{ (1|2|-1) \}$