Finanzmathematik für HAK

1. Kapitalverzinsung bei der Bank mit linearen (einfachen) Zinsen während des Jahres

Beispiel 1:
Ein Kapital von 3000 € wird mit 5% für 250 Tage verzinst. Wie viel bekommt man am Ende samt Zinsen?

Lösung:
Die Zinsen Z werden so berechnet: $Z = K_0 \cdot p/100 \cdot Tage/360 = 3000 \cdot 5/100 \cdot 250/360 = 104{,}17$ €
Das Endkapital am Ende des Jahres beträgt dann $K_1 = K_0 + Z = \underline{3104{,}17}$ €

Kurzformel für einfache Verzinsung: $K_E = K_0 \cdot (1 + p/100 * d/360)$ mit d = Tage

2. Kapitalverzinsung mehrjährig (theoretisch) mit exponentiellem Zinseszins

Beispiel 2:
Ein Kapital von 3000 € wird mit 5% verzinst. Wie viel bekommt man am Ende eines Jahres samt Zinsen?

Lösung:
Die Zinsen Z werden so berechnet: $Z = K_0 \cdot p/100 = 3000 \cdot 5/100 = 150$.
Das Endkapital am Ende des Jahres beträgt dann $K_1 = K_0 + Z = \underline{3150}$ €
Wie geht es ohne Zwischenschritt?
$K_1 = K_0 + K_0 \cdot p/100 = K_0 \cdot \mathbf{(1 + p/100)} = K_0 \cdot \mathbf{(1+i)}$
$K_1 = 3000 \cdot \mathbf{(1+5/100)} = 3000 \cdot \mathbf{1{,}05} = \underline{3150}$ €
und damit sind wir für die **Turbospeed**-Berechnung von Kapitalien und Zinsen und Zinseszinsen bereit !

Beispiel 3:
Ein Kapital von 3000 € soll 4 Jahre mit 5% Zinsen verzinst werden. Wie viel ist der Endbetrag?

Lösung:
Mit der langsamen Methode müsste man jedes Jahr die Zinsen berechnen und dann dazu schlagen, mit der TURBO-Methode geht es schneller: Für jedes Jahr muss man mit $\mathbf{(1+i) = (1+p/100)}$ multiplizieren, so dass sich nach 4 Jahren ergibt:
$K_4 = K_0 \cdot \mathbf{(1+i)^4} = 3000 \cdot \mathbf{(1+5/100)^4} = 3000 \cdot \mathbf{1{,}05^4} = \underline{3646{,}52}$ €

$$\boxed{\mathbf{K_n = K_0 \cdot (1+p/100)^n \quad = \quad \underline{K_0 \cdot (1+i)^n}}}$$

Beispiel 4:
1.Umkehraufgabe: Welches Kapital muss ich heute anlegen, um 20 000 € nach 10 Jahren bei 3% Verzinsung zu bekommen?

Lösung:
Wir können die Formel zuerst durch dividieren durch $(1+i)^{10}$ umformen:
$K_0 = K_n / (1+i)^{10} = 20\,000 / 1{,}03^{10} = 14881{,}88$ €

Beispiel 5:
2.Umkehraufgabe: Bei welchem Zinssatz wurde ein Kapital von 4500 € angelegt, wenn es in 5 Jahren auf 5344,59 € angewachsen ist?

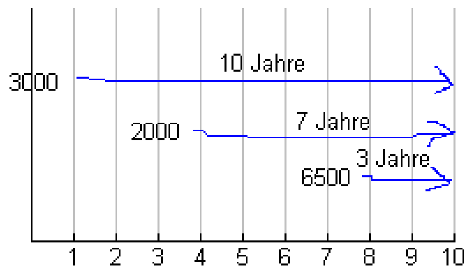
Lösung:
Jetzt probieren wir das Einsetzen in die Formel ohne vorheriges Umformen:
$K_n = K_0 \cdot (1+i)^n$
$5344{,}59 = 4500 \cdot (1+i)^5$ | : 4500
$1{,}18769 = (1+i)^5$ | 5.Wurzel ziehen
$(1+i) = \sqrt[5]{1{,}18769} = 1{,}035$
1+p/100 = 1,**035** → p=**3,5**%

Beispiel 6:
3.Umkehraufgabe: Wie lange muss ich ein Kapital von 1000 € auf der Bank zu 4,5% liegen lassen, damit ich 2000 € bekomme?

Lösung:
Hier hilft nur **systematisches (binäres) Probieren**, wenn man den *Logarithmus* nicht kennt:
$1000 \cdot 1{,}045^{10} = 1552{,}97$ – zu wenig
$1000 \cdot 1{,}045^{20} = 2411{,}71$ – zu viel
$1000 \cdot 1{,}045^{15} = 1935{,}28$ – etwas zu wenig
$1000 \cdot 1{,}045^{16} = 2022{,}37$ – etwas zu viel
also müssen wir ca. **15 ½ Jahre** warten bis sich das Kapital verdoppelt.

Beispiel 7:
Welches Endkapital erhält man in 10 Jahren, wenn man heute 3000 € einlegt, in 3 Jahren 2000 € einlegt und in 7 Jahren 6500 € einlegt? (Zinssatz 3%)

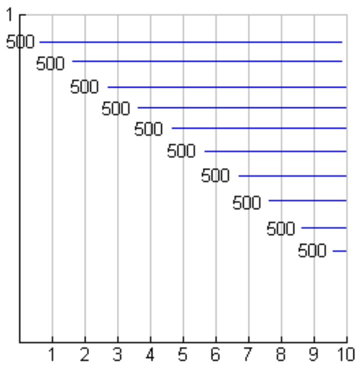
Lösung:



Zum besseren Überblick legen wir eine Zeitleiste an:
$(1+i) = 1{,}03$
Dazu müssen wir eigentlich nur summieren:
$E = 3000 \cdot (1+i)^{10} + 2000 \cdot (1+i)^7 + 6500 \cdot (1+i)^3 =$
$= \mathbf{13594{,}22\ €}$
Wenn man die Kapitalien ohne Zinsen summiert, erhält man: 3000+2000+6500 = 11500 €, also erhält man an **Zinseszinsen**: 13594,22 – 11500 = **2094,22 €**

3. NUN WIRD ES ERNST MIT DER RENTE:

Beispiel 8: Rentenendwert vorschüssig
Wie viel erhält man nach 10 Jahren, wenn man 10 Jahre lang jedes Jahr am Beginn (=vorschüssig) 500 € auf ein Konto einlegt, das mit 5% verzinst wird?

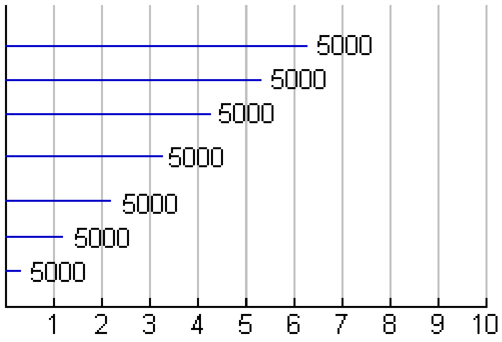


Lösung:
Diese Problem bringt mich nicht aus der Ruhe, ich zeichne eine Zeitleiste:

Also ist der Endwert aller Einlagen:
$E = 500 \cdot (1+i)^{10} + 500 \cdot (1+i)^9 + 500 \cdot (1+i)^8 + 500 \cdot (1+i)^7 + \ldots + 500 \cdot (1+i)$
also tippe ich sie alle ein und erhalte: **E = 6603,39**
mit der Rentenformel ergibt das schneller:

$$\mathbf{E_v = R \cdot (1+i)} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = 500 \cdot 1{,}05 \cdot \frac{1{,}05^n - 1}{1{,}05 - 1} = \mathbf{6603{,}39\ €}$$

Beispiel 9: Rentenbarwert nachschüssig
1.Umkehraufgabe: Welches Kapital muss ich einlegen, um 7 Jahre hindurch jährlich eine Rente von 5000 € am Ende des Jahres (=nachschüssig) zu bekommen (bei 4% Zinsen)?



Lösung:
Jetzt ist die Zeitrichtung umgekehrt: Es interessiert der **BARWERT** der Auszahlungen, d.h. welches K_0 man einlegen muss, um K_n zu bekommen.

B = $\frac{5000}{(1+i)^1} + \frac{5000}{(1+i)^2} + \frac{5000}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{5000}{(1+i)^7}$

Wieder beginnen wir von rechts und erkennen eine geometrische Reihe mit dem Startwert $\frac{5000}{(1+i)^7}$ und dem Faktor 1+i → B = $\frac{5000}{(1+i)^7} \cdot \frac{(1+i)^7 - 1}{(1+i)-1}$ = **30 010,27 €** **B_n = $\frac{R}{(1+i)^n} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)-1}$**

ohne Zinsen wären es 7·5000 = 35000 € , die man einzahlen müsste

Beispiel 10: Rentenberechnung
2.Umkehraufgabe: Welche Rente bekomme ich durch 15 Jahre hindurch jährlich am Ende des Jahres, wenn ich heute 20 000 € gewinne und auf ein Konto lege, das mit 6% verzinst wird?

Lösung:

Der Barwert ist 20000 und die Formel ergibt damit: **B_n = $\frac{R}{(1+i)^n} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)-1}$**

20000 = $\frac{R}{1{,}06^{15}} \cdot \frac{1{,}06^{15} - 1}{1{,}06 - 1}$ → $\frac{20000 \cdot 1{,}06^{15} \cdot (1{,}06 - 1)}{(1{,}06^{15} - 1)}$ = R → **R = 2059,26**

Beispiel 11: Zinssatzberechnung
3.Umkehraufgabe: Welchen Zinssatz habe ich bekommen, wenn ich regelmäßig 1500 € pro Jahr – 6 Jahre lang (am Beginn des Jahres) eingezahlt habe und am Ende 10500 € bekomme.

Lösung:

Hier ist wieder die Endwertformel an der Reihe: **E_v = R·q·$\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)-1}$**

11000 = 1500·q·$\frac{q^6 - 1}{q - 1}$ → 7 = q·$\frac{q^6 - 1}{q - 1}$ → ???

Hier muss man wieder probieren, bis man 7 erreicht:

q = 1,10 → q·$\frac{q^6 - 1}{q - 1}$ = 8,48 - zu groß

q = 1,05 → q·$\frac{q^6 - 1}{q - 1}$ = 7,14 - zu groß

q = 1,04 → q·$\frac{q^6 - 1}{q - 1}$ = 6,89 - zu klein

q = 1,045 → q·$\frac{q^6 - 1}{q - 1}$ = 7,02 - fast richtig → **der Zinssatz liegt bei 4,5%**

Beispiel 12: Barwert vorschüssig
Welchen Barwert erhalte ich, wenn ich regelmäßig 3000 € am Jahresbeginn einzahle, 7 Jahre lang bei einem Zinssatz von i = 3,5%

Lösung:

$$B_v = \frac{R}{(1+i)^{n-1}} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)-1} = \frac{3000}{1{,}035^6} \cdot \frac{1{,}035^7 - 1}{1{,}035 - 1} = \mathbf{18\,985{,}66\ €}$$

Beispiel 13: Endwert nachschüssig
Welchen Endwert erhalte ich, wenn ich regelmäßig 500 € am Jahresende auf ein Konto mit i = 2,5% für 10 Jahre lang einlege?

Lösung:

$$E_n = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)-1} = 500 \cdot \frac{1{,}025^{10} - 1}{1{,}025 - 1} = \mathbf{5601{,}69}\ €$$

Beispiel 14: Zeitdauerberechnung und Restrate
Wie lange muss ich ansparen, um 100 000 € zu erhalten, wenn ich regelmäßig 4000 € am Jahresende einzahle (bei i = 4%) und welche Einzahlung muss ich im letzten Jahr machen, gleichzeitig mit der letzten Einzahlung von 4000 €?

Lösung:

$$E_n = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)-1}$$

$$100\,000 = 4000 \cdot \frac{1{,}04^n - 1}{1{,}04 - 1} \qquad |:3000$$

$$25 = \frac{1{,}04^n - 1}{1{,}04 - 1} \qquad |\cdot(1{,}04-1)$$

$$1 = 1{,}04^n - 1 \qquad |+1$$

$$2 = 1{,}04^n \qquad |\log$$

$$\log(2) = n \cdot \log(1{,}04) \qquad |:\log(1{,}04)$$

n = 17,67 Jahre

Ich spare also 17 Jahre an und dann zahle ich noch die Restrate gleichzeitig mit der letzten Rate:

$$RR = E_n - R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)-1} = 100\,000 - 4000 \cdot \frac{1{,}04^{17} - 1}{1{,}04 - 1} = 5209{,}95\ € \quad + 4000\ € = \mathbf{9209{,}95\ €}$$

Oder ich spare 18 Jahre an und muss im letzten (=18. Jahr) am Jahresende nur mehr zahlen:

$$RR = E_n - R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)-1} = 100\,000 - 4000 \cdot \frac{1{,}04^{18} - 1}{1{,}04 - 1} = -2581{,}65\ € \quad + 4000\ € = \mathbf{1418{,}35\ €}$$

Hier sind alle Formeln auf einen Blick:

$$B_v = \frac{R}{(1+i)^{n-1}} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)-1} \qquad B_n = \frac{R}{(1+i)^n} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)-1} \qquad E_v = R \cdot q \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)-1} \qquad E_n = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)-1}$$

Unterjährige Verzinsung:

a) Kapitalverzinsung unterjährig

Wenn man nicht nur einmal verzinst während des Jahres, so spricht man von unterjähriger Verzinsung. Dazu brauchen wir neue Buchstaben. Sei nun j der **nominelle Jahreszins (z.B.: j = 12% p.a.)**. So nennt man diesen Jahreszins bei

- halbjähriger Verzinsung: $j_2 = \frac{j}{2}$ (j_2 = 6% p.s.= *per Semester*)
- vierteljähriger Verzinsung: $j_4 = \frac{j}{4}$ (j_4 = 3% p.q.= *per Quartal*)
- monatlicher Verzinsung: $j_{12} = \frac{j}{12}$ (j_{12} = 1% p.m.= *per Monat*)

Die Verzinsung von Kapitel erfolgt wie bei jährlicher Verzinsung, nur muss jetzt innerhalb des Jahres mehrmals verzinst werden:

$\boxed{K_n = K_0 \cdot (1+j_m)^{m \cdot n} = K_0 \cdot (1+j/m)^{m \cdot n}}$ m =Anzahl der Verzinsungen pro Jahr, n =Jahre

Beispiel 15: nominaler Endwert
Wie viel erhalte ich bei nominaler Verzinsung von 4% p.a. für ein Startkapital von 1000 € nach Ablauf eines Jahres mit
a) halbjähriger Verzinsung j_2 b) vierteljähriger Verzinsung j_4 c) monatlicher Verzinsung j_{12} ?

Lösung:

a) j_2 = 4% : 2 = 2% ➔ $K_2 = K_0 \cdot (1+j_2)^2 = 1000 \cdot 1{,}02^2$ = **1040,40 €**
b) j_4 = 4% : 4 = 1% ➔ $K_4 = K_0 \cdot (1+j_4)^4 = 1000 \cdot 1{,}01^4$ = **1040,60 €**
c) j_{12} = 4% : 12 = 1/3 % ➔ $K_{12} = K_0 \cdot (1+j_{12})^{12} = 1000 \cdot 1{,}00333\ldots^{12}$ = **1040,74 €**

Der Unterschied dieser Verzinsungen ist bei 1000 € noch nicht wirklich spürbar, bei mehrjähriger Verzinsung kommt aber doch ein Unterschied heraus. Damit auch bei unterjähriger Verzinsung das gleiche Ergebnis erzielt wir, muss man den äquivalenten Zinssatz nehmen:

Beispiel 16: äquivalenter Zinssatz
Wie muss der Zinssatz sein, damit bei monatlicher Verzinsung der gleiche Endwert wie bei jährlicher Verzinsung von 1000 € ein Jahr lang entsteht (bei i = 4% p.a.)?

Lösung:

Es muss also gelten: jährliche Verzinsung von 1000 € ergibt nach einem Jahr 1040 € und es soll mit der monatlichen Verzinsung der gleiche Wert erzielt werden, also muss gelten:

$1000 * (1+i_{12})^{12} = 1040 \implies (1+i_{12})^{12} = 1{,}04 \implies 1+i_{12} = \sqrt[12]{1{,}04} = 1{,}00327374$

Das heißt, die monatliche Verzinsung müsste mit dem Zinssatz $\mathbf{i_{12}}$ **= 0,327374 %** erfolgen (und nicht wie im vorigen Beispiel mit 0,333333 %

Äquivalenter Zinssatz:

Der äquivalente Zinsfaktor 1+i erhält folgende Buchstaben als Namen und den Wert:

- bei ganzjähriger Verzinsung: $1+i$
- bei halbjähriger Verzinsung: $1+i_2 = \sqrt[2]{1+i}$
- bei vierteljähriger Verzinsung $1+i_4 = \sqrt[4]{1+i}$
- bei monatlicher Verzinsung: $1+i_{12} = \sqrt[12]{1+i}$

Die Verzinsung von Kapitel erfolgt wie bei der nominalen Verzinsung:

$\boxed{K_n = K_0 \cdot (1+i_m)^{m \cdot n}}$ m...Anzahl der Verzinsungen pro Jahr, n... Jahre

Beispiel 17: Endwert mit gemischter oder theoretischer Verzinsung
Auf welchen Wert wächst ein Kapital von 20 000 €, das 15 Monate lang auf einem Konto, das mit i=3% p.a. verzinst wird, liegt
a) bei gemischter Verzinsung (Zinstermin nach 12 Monaten)
b) bei theoretischer monatlicher Verzinsung mit dem äquivalenten Zinssatz

Lösung:
a) Gemischte Verzinsung ergibt K = 20 000*(1+0,03)*(1+0,03*3/12) = **20 754,50 €**
b) Theoretische Verzinsung mit dem äquivalenten Monatszinssatz von

$$1+i_{12} = \sqrt[12]{1{,}03} = 1{,}00246627$$

ergibt $K = 20\,000 * 1{,}00246627^{15}$ = **20752,79 €**

Hier ergibt sich ein Unterschied von 1,71 €, da während des Jahres mit einfachen Zinsen gerechnet wird. Für die Rentenrechnung ist der Unterschied aber minimal, so dass hier immer mit der theoretischen Verzinsung gerechnet wird.

b) Unterjährige Rentenrechnung

Die Rentenrechnung muss hier um die Umrechnung des Zinssatzes in den äquivalenten Zinssatz ergänzt werde, dann kann man mit den gleichen Formeln wie vorher arbeiten – wenn man nicht vergisst, dass n jetzt eine neue Bedeutung bekommt: **n = Anzahl der Renten (und nicht Jahre!)** und m = Anzahl der Raten pro Jahr

Nachschüssige Formeln : $E_n = R \cdot \frac{A^n - 1}{A - 1}$ $B_n = \frac{R}{A^n} \cdot \frac{A^n - 1}{A - 1} = E_n / A^n$ mit $A = 1 + i_m = \sqrt[m]{1+i}$

Beispiel 18: Endwert und Barwert nachschüssig
Welchen Endwert und Barwert hat die Rentenreihe von 150 € pro Monat Einzahlung am Monatsende (nachschüssig) auf ein Konto, das mit 3,5% p.a. verzinst wird, nach 6 Jahren?

Lösung:
Hier liegt die nachschüssige („Einzahlung am Monatsende“) Aufgabe vor.

- Zuerst kommt die Berechnung des äquivalenten Zinssatzes: $1+i_{12} = \sqrt[12]{1{,}035} = 1{,}002870899$ (STO> A)
- dann kommt mit dem auf A gespeicherten Zinssatz und der Beachtung, dass n= 12*6 = 72 Einzahlungen ist:
- $E_n = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = 150 \cdot \frac{A^{72} - 1}{A - 1}$ = **11978,23 €**

Vertrauen ist gut – Kontrolle ist besser. Man kann diese Rechnung **näherungsweise** kontrollieren durch: **Rente x Anzahl x Verzinsung während der halben Zeit** = $150*6*12*1{,}035^3$ = **11974,15**

Die Barwertberechnung erfolgt nun durch die **Division durch den Zinsfaktor 1+i hoch Jahre**

$$\mathbf{B_n = E_n / (1+i)^6 = 11978{,}23 / 1{,}035^6 = 9744{,}30\ €}$$

Vorschüssige Formeln : $E_v = R \cdot A \cdot \frac{A^n - 1}{A - 1}$ $B_v = \frac{R}{A^{n-1}} \cdot \frac{A^n - 1}{A - 1}$ $= E_n / A^n$ mit $A = 1 + i_m = \sqrt[m]{1+i}$

Beispiel 19: Endwert und Barwert vorschüssig
Welchen Endwert und Barwert hat die Rentenreihe von 150 € pro Monat Einzahlung am Monatsanfang (vorschüssig) auf ein Konto, das mit 3,5% p.a. verzinst wird, nach 6 Jahren?

Lösung:
Hier liegt die vorschüssige („Einzahlung am Monatsanfang“) Aufgabe vor.

- Zuerst kommt die Berechnung des äquivalenten Zinssatzes: $1+i_{12} = \sqrt[12]{1{,}035} = 1{,}002870899$ (STO> A)
- dann kommt mit dem auf A gespeicherten Zinssatz und der Beachtung, dass n= 12*6 = 72 Einzahlungen ist:
- $E_v = R \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = 150 \cdot A \frac{A^{72} - 1}{A - 1}$ **= 12 012,62 €**

Vertrauen ist gut – Kontrolle ist besser. Man kann diese Rechnung **näherungsweise** kontrollieren durch: **Rente x Anzahl x Verzinsung während der halben Zeit** = $150 \cdot 6 \cdot 12 \cdot 1{,}035^3$ = **11974,15**

Die Barwertberechnung erfolgt nun durch die **Division durch den Zinsfaktor 1+i hoch Jahre**

$B_n = E_n / (1+i)^6 = 12\,012{,}62 / 1{,}035^6 = 9772{,}28$ €

Auch hier kann man wie vorher die Aufgabenstellung umdrehen und nicht nach Endwert oder Barwert fragen sondern nach **Rente** oder **Zeitdauer** (und Schlussrate) oder **Zinssatz** (letzteres nur mit Taschenrechnern mit solve-Funktion).

Beispiel 20: Rentenberechnung
Wenn ich 50 000 € auf die Bank zu 4% p.a. lege und monatlich nachschüssig davon eine Rente durch 12 Jahre lang beziehen möchte – wie hoch ist diese Rente?

Lösung:
Hier ist die Barwertformel nachschüssig nötig:

$B_n = \frac{R}{(1+i)^n} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}$ $B_n = 50\,000$ $1+i_{12} = \sqrt[12]{1{,}04} = 1{,}00327374$ (STO> A) n = 12*12 = 144

$50\,000 = \frac{R}{A^{144}} \cdot \frac{A^{144} - 1}{A - 1}$

Das muss umgeformt werden durch Multiplikation mit $A^{144} \cdot (A-1)$ und Division durch $(A^{144}-1)$ zu

$R = \frac{50\,000 \cdot A^{144} \cdot (A-1)}{(A^{144} - 1)}$ = **436,03 €**

Kontrolle: $B_n \approx 436{,}03 \cdot 12 \cdot 12 / 1{,}04^6 = 49\,622{,}53 \approx 50\,000$ ➔ also OK

Beispiel 21: Rentendauer und Restrate
Sonja hat 40 000 € angespart und will ab sofort (vorschüssig) eine vierteljährliche Rente von 800 € bei 4,5% Bankzinsen beziehen. Wie lange kann sie diese beziehen? Wie groß ist die Restrate, ein Quartal nach der letzten Vollrate ausbezahlt?

Lösung:

- zuerst die Umrechnung auf den äquivalenten Quartalszinssatz: $1+i_4 = \sqrt[4]{1{,}045} = 1{,}01106499$ (STO> A)
- dann die richtige Formel: $B_v = \frac{R}{(1+i)^{n-1}} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}$ ➔ umgeformt auf n ergibt schrittweise:

$$B_v = \frac{R \cdot A}{A^n} \cdot \frac{A^n - 1}{A - 1} = \frac{R \cdot A}{A-1} \cdot \frac{A^n - 1}{A^n} = \frac{R \cdot A}{A-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{A^n}\right) \qquad | \cdot(A-1) :(R\cdot A)$$

$$\frac{B_v \cdot (A-1)}{R \cdot A} = 1 - A^{-n} \qquad |-1$$

$$\frac{B_v \cdot (A-1)}{R \cdot A} - 1 = -A^{-n} \qquad |\cdot(-1)$$

$$1 - \frac{B_v \cdot (A-1)}{R \cdot A} = A^{-n} \qquad | \log$$

$$\log\left(1 - \frac{B_v \cdot (A-1)}{R \cdot A}\right) = -n \cdot \log(A) \qquad |: -\log(A)$$

$$\frac{\log\left(1 - \frac{B_v \cdot (A-1)}{R \cdot A}\right)}{-\log(A)} = n$$

das ergibt eingesetzt: $n = \frac{\log\left(1 - \frac{40\,000 \cdot (A-1)}{800 \cdot A}\right)}{-\log(A)}$ = 71,999 Renten also 71 Vollraten

durch 4 geteilt, sind das rund 18 Jahre
(ohne Zinsen wären es 40000:800 = 50 Renten)

- Der **Barwert der Restrate B_{RR}** ist erhältlich, wenn man in der Barwertformel das Gleichheitszeichen durch ein Minus ersetzt:

$$B_{RR} = B_v - \frac{R \cdot A}{A^n} \cdot \frac{A^n - 1}{A - 1} = 40\,000 - \frac{800A}{A^{71}} \cdot \frac{A^{71} - 1}{A - 1} = 365{,}90$$

- Die **Restrate RR** soll ein Quartal nach der letzten Rate ausbezahlt werden. Die erste Rate wird sofort ausbezahlt (vorschüssig), daher wird die 71. Rate nach 70 Quartalen ausbezahlt und die Restrate nach 71 Quartalen. Also muss man 71 Quartale mit dem Zinsfaktor $(1+i_4) = A$ aufzinsen: $RR = B_{RR} \cdot (1+i_4)^{71} = 365{,}90 \cdot A^{71}$ = **799,23 €**

Diese Formeln sollte man sich merken:

vorschüssig: $n = \frac{\log\left(1 - \frac{B_v \cdot (A-1)}{R \cdot A}\right)}{-\log(A)}$	nachschüssig: $n = \frac{\log\left(1 - \frac{B_n \cdot (A-1)}{R}\right)}{-\log(A)}$	$A = 1+i_m$.

Rentenumwandlungen

Beispiel 22: Rentenumwandlung in Einmalzahlung
Statt eine Rente von 500 € monatlich vorschüssig für 8 Jahre hindurch möchte Sandra eine Einmalzahlung 2 Jahre nach Beginn der geplanten Rentenzahlung (bei i = 6% p.a.). Wie viel beträgt dieser Einmalbetrag?

Lösung:

a) Man kann hier den Endwert der Rentenreihe berechnen und dann 6 Jahre rückzinsen
b) oder man kann den Barwert berechnen und 2 Jahre aufzinsen
c) oder man kann den Endwert der ersten 2 Jahre und den Barwert der letzten 6 Jahre berechnen und addieren.

Hier soll die Methode a) gezeigt werden:

zuerst die Berechnung des äquivalenten Zinssatzes: $A = 1+i_{12} = \sqrt[12]{1{,}06} = 1{,}004867551$

$$E_v = R \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)-1} = 500 \cdot A \cdot \frac{A^{8 \cdot 12} - 1}{A-1} = 61\,297{,}63$$

Barwert vor 6 Jahren = 61 297,63 / $1{,}06^6$ **= 43 212,41 €**

Beispiel 23: Rentenumwandlung in anschließende Rente
Herbert spart jährlich 1500 € nachschüssig für 20 Jahre lang bei i=3,5% p.a. bei einer Bank, um dann anschließend jährlich nachschüssig für 10 Jahre lang eine Rente ausbezahlt zu bekommen – wie hoch wird dieser Rentenbetrag sein?

Lösung:

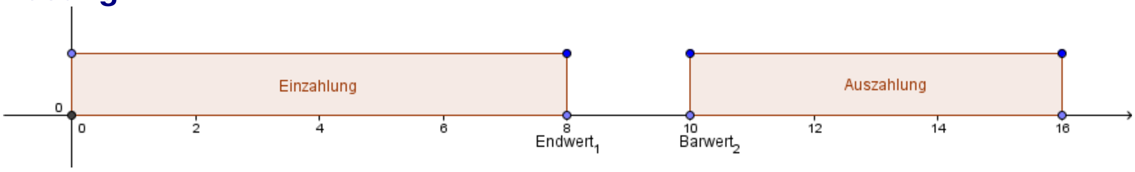
Da der Anschluss der Auszahlungen an die Einzahlungen sofort erfolgt, kann man sagen, dass der Endwert der ersten Rentenreihe gleich dem Barwert der 2.Rentenreihe ist:

$$E_n = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)-1} = 1500 \cdot \frac{1{,}035^{20} - 1}{1{,}035 - 1} = 42419{,}52 \quad = \quad B_n = \frac{R}{(1+i)^n} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)-1}$$

$$\Rightarrow 42419{,}52 = \frac{R}{1{,}035^{10}} \cdot \frac{1{,}035^{10} - 1}{1{,}035 - 1} \quad \Rightarrow \mathbf{R} = \frac{42419{,}52 \cdot 1{,}035^{10} \cdot (1{,}035 - 1)}{(1{,}035^{10} - 1)} = \mathbf{5100{,}58\ €}$$

Beispiel 24: Rentenumwandlung mit Unterbrechung
Barbara soll als Studienunterstützung eine regelmäßige Zahlung von 500 € nachschüssig pro Monat, 6 Jahre lang, in 10 Jahren bekommen. Wie viel muss man ab heute jährlich für 8 Jahre nachschüssig einlegen ? (i=2,5% p.a.)

Lösung:



Hier haben wir eine Lücke zwischen Einzahlung und Auszahlung!
Man muss zuerst den Barwert der 2.Auszahlungsreihe berechnen, dann 2 Jahre rückzinsen, das ergibt den Endwert der 1.Einzahlungsreihe und davon den Ratenbetrag berechnen:

Zuerst die Berechnung des Zinsfaktors $A = 1+i_{12} = \sqrt[12]{1{,}025} = 1{,}002059836$, dann Barwert

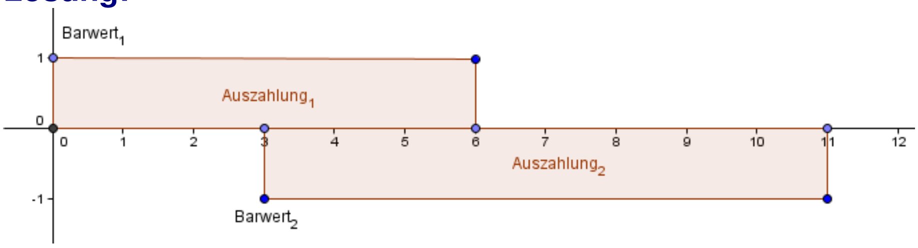
$$\mathbf{B_{2n}} = \frac{R}{(1+i)^n} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = \frac{500}{A^{6 \cdot 12}} \cdot \frac{A^{6 \cdot 12} - 1}{A - 1} = \mathbf{33\,425{,}75}$$

nun erfolgt die Rückzinsung: $E_1 = B_2 : 1{,}0252 = 33\,425{,}75 : 1{,}025^2 = 31\,815{,}11$
und nun kommt die **jährliche** Rentenberechnung :

$$\mathbf{E_n} = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} \Rightarrow 31\,815{,}11 = R \cdot \frac{1{,}025^8 - 1}{1{,}025 - 1} \Rightarrow \mathbf{R} = \frac{31\,815{,}11 \cdot (1{,}025 - 1)}{(1{,}025^8 - 1)} = \mathbf{3641{,}79\ €}$$

Beispiel 25: Rentenumwandlung in andere Rente
Statt ab sofort eine vorschüssige Rente von 1000 € pro Semester für 6 Jahre zu bekommen will Robert eine Rente pro Quartal für 8 Jahre, beginnend in 3 Jahren (vorschüssig). Wie hoch wird die Rente sein bei i=4%?

Lösung:



Hier wird der Barwert der ersten Rente um 3 Jahre verschoben und die Laufzeit ist auch anders!
Zinsfaktorberechnung: $A = 1+i_2 = \sqrt{1{,}04} = 1{,}019803903$

$$\mathbf{B_{v1}} = \frac{R}{(1+i)^{n-1}} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = \frac{1000}{A^{11}} \cdot \frac{A^{12} - 1}{A - 1} = \mathbf{11865{,}26}$$

Diesen Barwert muss man 3 Jahre aufzinsen, dann wird daraus der neue Barwert B_{v2}:
$B_{v2} = 11865{,}26 \cdot 1{,}04^3 = 13346{,}80$
und damit lässt sich die neue Rente berechnen:
zuerst wieder der Zinsfaktor, da jetzt Quartale berechnet werden:
$A = 1+i_2 = \sqrt[4]{1{,}04} = 1{,}009853407$

$$\mathbf{B_{v2}} = \frac{R_2}{(1+i)^{n-1}} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} \Rightarrow 13\,346{,}80 = \frac{R_2}{A^{31}} \cdot \frac{A^{32} - 1}{A - 1} \Rightarrow$$

$$\mathbf{R_2} = \frac{13\,346{,}80 \cdot A^{31} \cdot (A - 1)}{(A^{32} - 1)} = \mathbf{483{,}56\ €}$$

Kreditabbrüche und Umwandlungen

Beispiel 26: einmalige Restzahlung (Restschuldberechnung)
Ein Kredit von 20 000 € wird über 10 Jahre lang durch eine jährliche nachschüssige Rate zurückgezahlt. (Zinssatz i = 8% p.a.)

- Wie groß ist diese Rate?
- Der Kreditnehmer hat nach 2 Jahren plötzlich viel Geld und kann den Kredit auszahlen. Wie viel müsste er für die Restschuld zahlen?

Lösung:
Hier müssen wir die Barwertformel für nachschüssige Zahlung nehmen:

$$B_n = \frac{R}{(1+i)^n} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} \;\Rightarrow\; 20\,000 = \frac{R}{1{,}08^{10}} \cdot \frac{1{,}08^{10} - 1}{1{,}08 - 1}$$

$$\Rightarrow\; R = \frac{20\,000 \cdot 1{,}08^{10} \cdot (1{,}08 - 1)}{(1{,}08^{10} - 1)} = \mathbf{2980{,}59}$$

Die Restschuld nach 2 Jahren kann nun folgendermaßen berechnet werden:
Die Kreditschuld wird 2 Jahre aufgezinst: $20\,000 \cdot 1{,}08^2 = 23\,328$
und der Endwert der Ratenzahlung über 2 Jahre wird berechnet:

$$E_n = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = 2980{,}59 \cdot \frac{1{,}08^2 - 1}{1{,}08 - 1} = 6199{,}63$$

Und dann wird die **Restschuld als Differenz der aufgezinsten Schuld und dem Endwert** berechnet zu: **RS =** 23328 – 6199,63 **= 17 128,37 €**

Es geht auch **schneller**: Man kann den **Barwert der nicht gezahlten Beiträge** berechnen:

$$B_n = \frac{R}{(1+i)^n} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = \frac{2980{,}59}{1{,}08^8} \frac{1{,}08^8 - 1}{1{,}08 - 1} = \mathbf{17\,128{,}37\ €}$$

Beispiel 27: Ratenänderung ➔ Zeitdauerberechnung und Restratenberechnung
Ein Kredit von 20 000 € wird über 10 Jahre lang jährlich durch eine nachschüssige Rate von R = 2980,59 zurückgezahlt (bei i = 8% p.a.).
Nach Ablauf von 2 Jahren soll die Rate auf 3800 € erhöht werden. Wie groß ist dann die Rückzahlungsdauer und wie hoch ist die Restrate ein Jahr nach der letzten Vollrate?

Lösung:
Wie im vorigen Beispiel schon berechnet, ist die Restschuld nach 2 Jahren: RS = 17 128,37 €
Jetzt kann eine Laufzeitberechnung erfolgen:

$$n = \frac{\log\left(1 - \frac{B_n \cdot (A-1)}{R}\right)}{-\log(A)} = \frac{\log\left(1 - \frac{17128{,}37 \cdot (1{,}08 - 1)}{3800}\right)}{-\log(1{,}08)} = 5{,}81$$

Epochen, also 5 Vollraten und eine Restrate, die wir folgendermaßen berechnen: Barwert:

$$B_{RR} = B_n - \frac{R}{(1+i)^n} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = 17128{,}37 - \frac{3800}{1{,}08^5} \cdot \frac{1{,}08^5 - 1}{1{,}08 - 1} = \mathbf{1956{,}07}$$

Der Endwert 6 Jahre später ergibt sich zu: **RR** = $1956{,}07 \cdot 1{,}08^6$ = **3104,04**

Beispiel 28: Unterbrechung mit Ratenberechnung
Die Schuld von 35 000 € soll in 15 Jahren abgetragen werden mit einer jährlichen nachschüssigen Rate bei i = 7%.
a) Wie hoch ist die Rate ?
b) Nach 7 Jahren kann der Kreditnehmer die Raten für 2 Jahre nicht zahlen. Dann will er die Zahlung mit erhöhten Raten wieder aufnehmen, um in der vorgesehenen Zeit damit fertig zu werden.

Lösung:

a) Ratenberechnung: $B_n = \frac{R}{(1+i)^n} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)-1}$ ➔ $35\,000 = \frac{R}{1{,}07^{15}} \cdot \frac{1{,}07^{15}-1}{1{,}07-1}$ ➔ **R = 3842,81**

b) Restschuldberechnung nach 7 Jahren = 8 verbliebene Jahre:

$$RS = B_n = \frac{R}{(1+i)^n} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)-1} = \frac{3842{,}81}{1{,}07^8} \cdot \frac{1{,}07^8-1}{1{,}07-1} = \mathbf{22\,946{,}58}$$

2 Jahre aufzinsen (weil Pause): $22\,946{,}58 \cdot 1{,}072^2 = \mathbf{26\,271{,}53}$

neue Ratenberechnung: $B_n = \frac{R}{(1+i)^n} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)-1}$ ➔ $26\,271{,}53 = \frac{R}{1{,}07^8} \cdot \frac{1{,}07^8-1}{1{,}07-1}$ ➔ **R = 5511,66**

Beispiel 29: Zinsänderung
Ein Kredit von 10 000 € soll auf 5 Jahre durch monatliche vorschüssige Raten zurückgezahlt werden (bei i=6%)
a) Wie groß ist die Rate?
b) Nach 2 Jahren wird der Zinssatz auf i=7% erhöht. Wie groß ist nun die Rate bei gleich bleibender Restdauer?

Lösung:

a) Ratenberechnung: zuerst muss $A=1+i_{12}$ berechnet werden: $A=\sqrt[12]{1{,}06} = 1{,}004867551$

dann kommt die Barwertformel:

$B_v = \frac{R}{(1+i)^{n-1}} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)-1}$ ➔ $10\,000 = \frac{R}{A^{59}} \cdot \frac{A^{60}-1}{A-1}$ ➔ $\mathbf{R} = \frac{10\,000 \cdot A^{59} \cdot (A-1)}{(A^{60}-1)} = \mathbf{191{,}66}$

b) Restschuldberechnung nach 2 Jahren = 3 verbliebene Jahre = 36 Monate:

$$RS = \frac{R}{(1+i)^{n-1}} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)-1} = \frac{191{,}66}{A^{35}} \cdot \frac{A^{36}-1}{A-1} = \mathbf{6345{,}74}$$

neue Ratenberechnung nach Zinsänderung: $A = 1+i_{12} = \sqrt[12]{1{,}07} = 1{,}005654145$

$B_v = \frac{R}{(1+i)^{n-1}} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)-1}$ ➔ $6345{,}74 = \frac{R}{A^{35}} \cdot \frac{A^{36}-1}{A-1}$ ➔ $\mathbf{R} = \frac{6345{,}74 \cdot A^{35} \cdot (A-1)}{(A^{36}-1)} = \mathbf{194{,}22}$ **€**

Investitionsbewertung mit der Kapitalwertmethode

Beispiel 30: Kapitalwertmethode
Zwei Investitionsobjekte sollen verglichen werden.
A) liefert jährlich nachschüssig 3000€ durch 6 Jahre und kann heute mit 15 000 € erworben werden
B) liefert am Ende des ersten Jahres 4000€, am Ende des 2. Jahres 3000 €, am Ende des dritten Jahres 5000€, am Ende des 6.Jahres 8000 €. Es kann um 15 000 € erworben werden.
Welches Objekt liefert mehr Kapitalwert, wenn als Zins i=5% angenommen wird?

Lösung:
A) ist einfach eine Barwertberechnung für die regelmäßige Zahlung:

$$B_n = \frac{R}{(1+i)^n} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = \frac{3000}{1{,}05^6} \cdot \frac{1{,}05^6 - 1}{1{,}05 - 1} = \mathbf{15\ 227{,}08}$$

Von diesem Rückfluss muss ich mein eingesetztes Kapital von 15 000 € abziehen und erhalte als **Überschuss: 227,08 €**
B) Ist eine Kapitalrückzinsung:
$K_0 = 4000/1{,}05^1 + 3000/\ 1{,}05^2 + 5000/1{,}05^3 + 8000/1{,}05^8 = 16\ 264{,}52$
Von diesem Rückfluss muss ich mein eingesetztes Kapital von 15 000 € abziehen und erhalte als **Überschuss: 1264,52 €**

➔ also werde ich die **2. Investition** wählen

Diskont und antizipativer Zinssatz

Beispiel 31: Diskont und antizipativer Zinssatz
Ein Kapital von 8000 € soll mit dem Diskontsatz von d = 3% über 5 Jahre verzinst werden. Wie groß ist das Endkapital?

Lösung:
Der Diskont ist ein verkehrter Zins, der bei Wechselgeschäften verlangt wird. Er wird vom Endwert des Wechsels rückbezogen. Dabei gilt, dass der äquivalente (dekursive) Zinssatz sich berechnet mit: $1 + i = \frac{1}{1-d} = \frac{1}{1-0{,}03} = 1{,}030927835$ und ist immer höher als der normale Zinssatz.
Damit wird unser Endkapital: $\mathbf{K_n} = K_0 \cdot (1+i)^n = 8000 \cdot 1{,}030927835^{\,5}$ **= 9316,04 €**