Onlinekurs Umgekehrte Kurvendiskussion

Übersichts–Video: Simple Club
Video: Steckbriefaufgabe 3.Grades – der Reihe nach
Übersicht über Vokabeln: https://www.youtube.com/watch?v=xcs3JEWhTGM

Formelsammlung 6: https://mathe-mit-manfred.at/math/TH_Formelsammlung_Gurtner.pdf

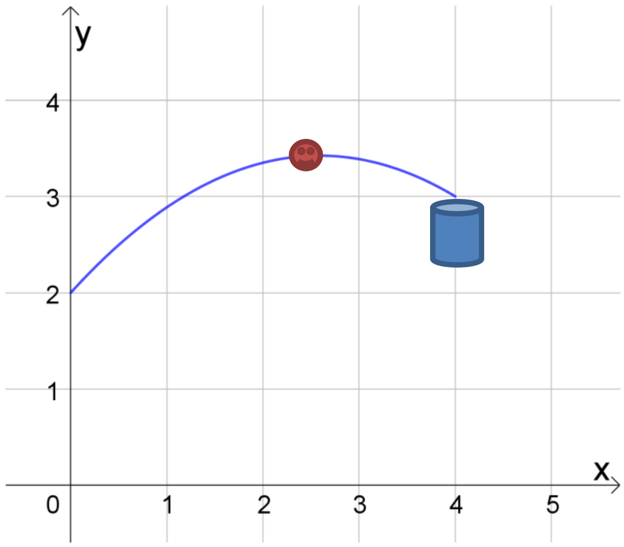
Umgekehrte Kurvendiskussion:

- Ansatz einer Funktion dritten Grades: $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
- Nullstellen, **Punkte**, Sonderpunkte mit (x|y) ➔ in f(x) = y einsetzen:
- Extrem**stellen** mit gegebenem x ➔ in f ’(x) = 0 einsetzen
- Wende**stellen** mit gegebenem x ➔ in f ’’(x) = 0 einsetzen
- Steigungen k an der Stelle x ➔ in f ’(x) = k einsetzen
- „berühren“ – heißt: „gleiche Steigung wie“
- „symmetrisch“ – nur gerade Potenzen von x sind nötig bei der Funktionsgleichung

Start mit der Aufgabe:

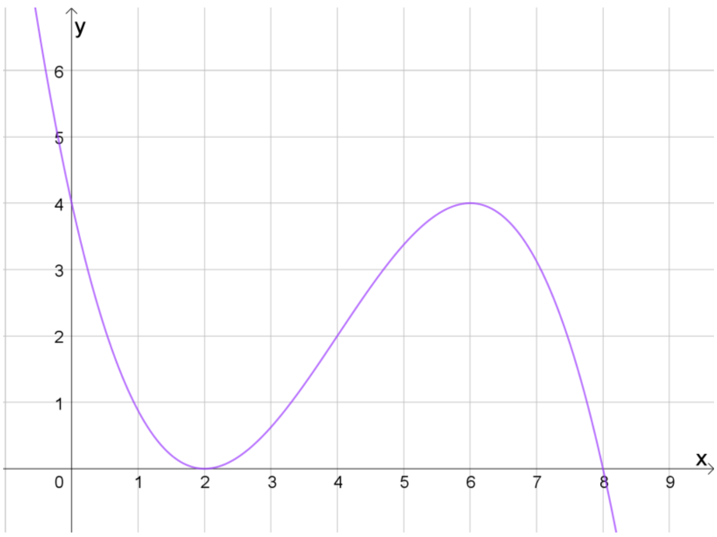
1) Beim Basketball wird beim Freiwurf ein Ball vom Startpunkt in 2 Meter Höhe zum Korb in 4 m waagrechter Entfernung und in 3 m Höhe geworfen. Dort soll er mit einer Steigung von −0,6 in den Korb fallen.

– Bestimmen Sie ein Gleichungssystem aus diesen Angaben für eine passende Polynomfunktion 2. Grades
– Bestimmen Sie deren Funktionsterm
– Berechnen Sie den Hochpunkt der Parabel



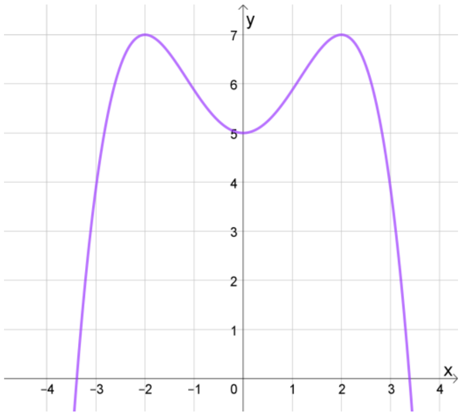
2) Es soll das Modell eines Berges erstellt werden. Man weiß, dass der **höchste** Punkt mit der Höhe 4 (Hundert) Metern in der waagrechten Entfernung von 6 (Hundert) Metern liegt.
   Davor, in 4 (Hundert) Metern Entfernung gibt es den **steilsten** Punkt des Berges in 2 (Hundert) Meter Höhe.

- Modellieren Sie eine Polynomfunktion dritten Grades, die diesen Angaben genügt.
- Bestimmen Sie die Steilheit des steilsten Punktes.



3) Um einen Schriftzug für ein Mac−Donalds− M zu modellieren soll eine symmetrische Funktion 4. Grades benutzt werden.
Der Tiefpunkt soll bei $T(0|5)$ liegen,
ein Hochpunkt soll bei $H(-2|7)$ liegen.

− Bestimmen Sie den Funktionsterm



Lösung Aufgabe 1:

a) Umwandlung des Textes in Funktionsterme und Punkte

Polynomfunktion 2. Grades ist allgemein: $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

1. Ableitung $f'(x) = 2a \cdot x + b$

Startpunkt $S = (0|2)$

Korb $K = (4|3)$

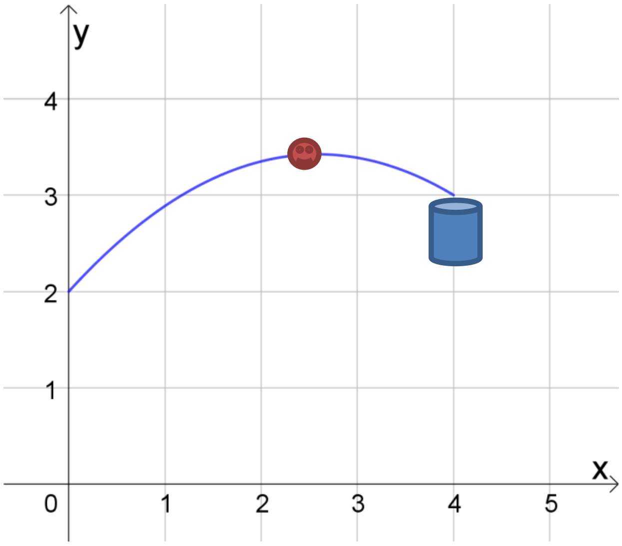
Steigung beim Korb: $f'(x=4) = -0{,}6$

b) Einsetzen der Punkte in die Funktionsterme:

$S(0|2) \rightarrow f(0) = 2 \rightarrow a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 2$

$K(4|3) \rightarrow f(4) = 3 \rightarrow a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c = 3$

$f'(4) = -0{,}6 \rightarrow 2a \cdot 4 + b = -0{,}6$



c) Lösung des Gleichungssystems:

$c = 2$

$16a+4b+2 = 3 \quad |-2$

$8a+b= -0{,}6 \quad |\cdot(-2)$

$16a + 4b = 1$

$-16a - 2b = 1{,}2$ addieren

$2b = 2{,}2 \quad |:2$

$b = 1{,}1$

…………………………

einsetzen: $16a + 4 \cdot 1{,}1 = 1 \rightarrow 16\,a = -3{,}4 \rightarrow a = -0{,}2125$

Funktionsterm: $f(x) = -0{,}2125\,x^2 + 1{,}1\,x + 2$

Maximum wenn $f'(x)=0 \rightarrow f'(x) = -0{,}425\,x + 1{,}1 = 0 \rightarrow x = 2{,}588 \rightarrow f(2{,}588) =$ **3,42 m hoch**

Lösung Aufgabe 2:

I. Umwandlung des Textes in Funktionsterme und Punkte:

Polynomfunktion 3. Grades ist allgemein: $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

1. Ableitung $f'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$
2. Ableitung: $f''(x) = 6a \cdot x + 2b$

Hochpunkt H(6|4)

Steilster Punkt W(4|2)

II. Einsetzen der Punkte in die Funktionsterme:

H(6|4) ➔ $f(6) = 4$ ➔ $a \cdot 6^3 + b \cdot 6^2 + c \cdot 6 + d = 4$

W(4|2) ➔ $f(4) = 2$ ➔ $a \cdot 4^3 + b \cdot 4^2 + c \cdot 4 + d = 2$

Höchster Punkt bei $x = 6$ ➔ $f'(6) = 0$ ➔ $3a \cdot 6^2 + 2b \cdot 6 + c = 0$

Steilster Punkt bei $x = 4$ ➔ $f''(x) = 0$ ➔ $6a \cdot 4 + 2b = 0$

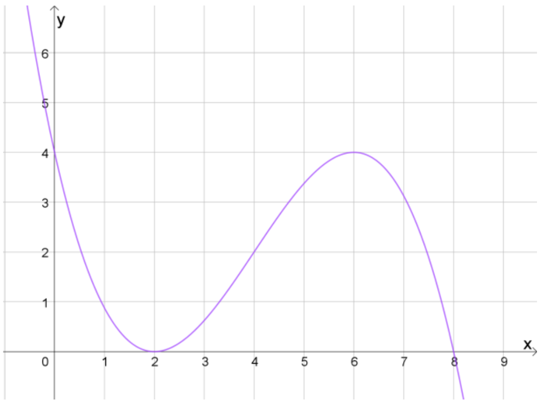
III. Lösung des Gleichungssystems:

a) $216a + 36b + 6c + d = 4$

b) $64a + 16b + 4c + d = 2$

c) $108a + 12b + c = 0$

d) $\underline{24a + 2b = 0}$



Zuerst d eliminieren (von hinten an):

a) – b) ergibt: $152a + 20b + 2c = 2 \quad | :2$

c) $\underline{108a + 12b + c = 0 \quad | \cdot (-1)}$

$76a + 10b + c = 1$

$\underline{-108a - 12b - c = 0}$

$-32a - 2b = 1$

Gleichung d) $\underline{24a + 2b = 0}$

$-8a = 1$ ➔ **$a = -1/8$**

Rückeinsetzen in d) $-3 + 2b = 0$ ➔ **$b = 3/2$**

Rückeinsetzen in c) $-13{,}5 + 18 + c = 0$ ➔ **$c = -4{,}5$**

Rückeinsetzen in a) $-27 + 54 - 27 + d = 4$ ➔ **$d = 4$**

IV. Funktionsgleichung: $f(x) = -1/8\, x^3 + 3/2\, x^2 - 4{,}5\, x + 4$

V. Steilheit in $x = 4$ ➔ $f'(x) = -3/8x^2 + 3x - 4{,}5 = 1{,}5$ (=**150%**)

Lösung Aufgabe 3:

Funktionsansatz:

$f(x) = a\cdot x^4 + b\cdot x^2 + c$ (nur gerade x−Potenzen bei symm.F.)

$f'(x)= 4a\cdot x^3 + 2b\cdot x$

T(0|5) ➔ $f(0) = 5$ ➔ **$c = 5$**

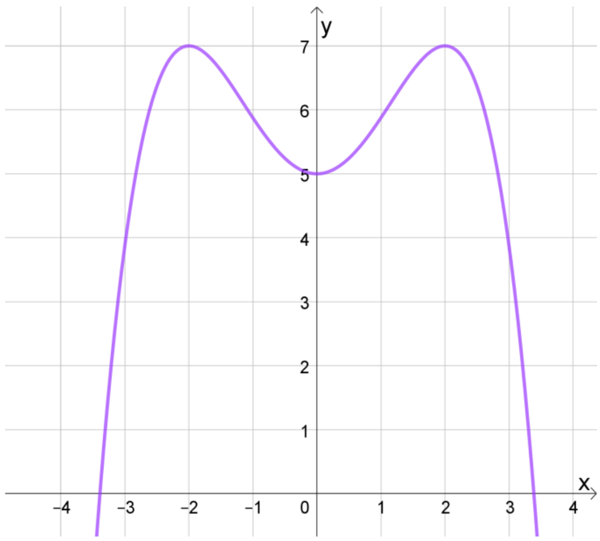
H(−2|7) ➔ $f(-2) = 7$ ➔ $16a + 4b + c = 7$ ➔ $16a + 4b=2$

Extremstelle bei $x = -2$ ➔ $f'(-2) = 0$ ➔ $\underline{-32a - 4b = 0}$

addieren $-16a = 2$ ➔ **$a= -1/8$**

Rückeinsetzen bei $16a+4b = 2$ ➔ **$b = 1$**

Funktionsterm: $f(x) = -1/8\ x^4 + x^2 +5$



Übungen:

1) , 2) und 3) von: https://mathe-mit-manfred.at/math/Umgekehrte%20Kurvendiskussion.pdf

Hausübung: 4, 8

Und Beispiel X:

X) Die mittlere Tagestemperatur in Bregenz soll für einen bestimmten Zeitraum durch eine Polynomfunktion 3. Grades T angenähert werden:

$T(t) = a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t + d$

t ... Zeit in Tagen

T(t) ... mittlere Tagestemperatur zur der Zeit t in °C

Es wurden folgende Daten ermittelt:

Zu Beginn der Beobachtung (t = 0) lag die mittlere Tagestemperatur bei –4 °C.

Zur Zeit t = 10 Tage betrug sie +8 °C; zu dieser Zeit lag auch der **Wendepunkt** des Temperaturverlaufs vor.

Zur Zeit t = 20 Tage erreichte die mittlere Tagestemperatur ihr **Maximum**

−Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Ermittlung der Koeffizienten dieser Polynomfunktion und lösen Sie es!

−Ermitteln Sie die Höhe des Maximums

Lösung 4) $T(t) = -0{,}006 \cdot t^3 + 0{,}18 \cdot t^2 - 4$,

Maximum = 20 °C