

Onlinekurs: Geschwindigkeit + Beschleunigung

1. mittlere Geschwindigkeit = Wegstrecke : Zeit

$$V = \frac{s}{t} \quad \text{besser:} \quad v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\text{Wegstreckendifferenz}}{\text{Zeitdifferenz}} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} \quad (\text{Differenzenquotient})$$

Will man die Momentangeschwindigkeit, so muss man den Grenzwert des Differenzenquotienten = 1. Ableitung der Funktion $s(t)$ nehmen

Momentangeschwindigkeit $v(t) = s'(t)$

(Video: Wasserrakete <https://www.youtube.com/watch?v=9F9-nbm9Do4>)

BEISPIEL 1: senkrechter Wurf: <https://www.youtube.com/watch?v=CEGeI6RX3Rg>

Für einen senkrechten Wurf mit Anfangsgeschwindigkeit 40 m/s gilt die

Höhenfunktion $h(t) = -5 \cdot t^2 + 40 \cdot t$ (h gibt die Höhe in m, t gibt die Zeit in sec an)

Für das obige Beispiel ist dann die Momentangeschwindigkeit die 1. Ableitung:

$$v(t) = h'(t) = -10 \cdot t + 40$$

Damit kann man folgende Fragen lösen:

- Welche Höhe wird nach 3 Sekunden erreicht (Höhenfunktion)?
- Wie groß ist die Geschwindigkeit nach 0, 1, 2, 3, ..., 8 Sekunden?
(Geschwindigkeitsfunktion)
- Wann ist die Geschwindigkeit = 0 (Geschwindigkeitsfunktion) und was bedeutet das?
- Wie groß ist die größte Höhe der Wasserrakete (Hochpunkt) (Höhenfunktion)?

Lösung:

a) $h(3) = -5 \cdot 3^2 + 40 \cdot 3 = 75$ (m)

b) $v(0) = -10 \cdot 0 + 40 = 40$

$v(1) = -10 \cdot 1 + 40 = 30$

$v(2) = -10 \cdot 2 + 40 = 20$

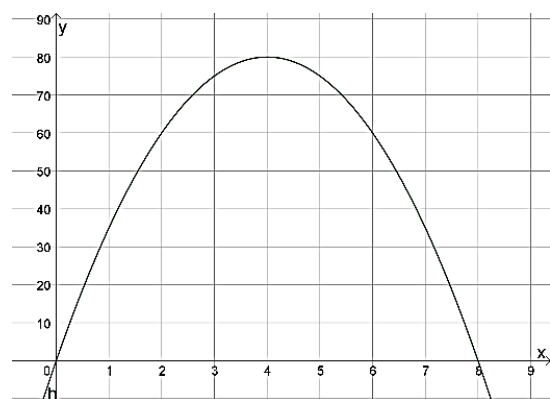
$v(3) = -10 \cdot 3 + 40 = 10$

$v(4) = -10 \cdot 4 + 40 = 0$

.....

$v(8) = -10 \cdot 8 + 40 = -40$

Was bedeutet ein negatives Vorzeichen?



- Wie man aus der Liste entnehmen kann, ist zum Zeitpunkt $t = 4$ die Geschwindigkeit = 0. →
Das ist der Umkehrpunkt des senkrechten Wurfs.
(kann durch die Gleichung $v(t) = 0$ bestimmt werden)
- Die größte Höhe können wir am Umkehrpunkt ($t=4$) mit der Funktion $h(t) = -5 \cdot t^2 + 40 \cdot t$ bestimmen → $s(4) = -5 \cdot 4^2 + 40 \cdot 4 = 80$ m hoch

2. Was ist die Beschleunigung?

Im Alltag heißt es von einem Auto: Es beschleunigt in 7 Sekunden von 0 auf 100 km/h. Das bedeutet, in einer Sekunde nimmt die Geschwindigkeit um ca. $100/7 = 14$ km/h zu. Rechnet man das in m/s um, ergibt sich ca. 4 m/s – – – – (wie rechnet man das um?)

VIDEO Kursleiter: <https://www.youtube.com/watch?v=-1oMoWkllIQ>

Nun definiert man die **mittlere Beschleunigung** a (= acceleration) als Differenzenquotient der Geschwindigkeit:

$$a = \frac{v}{t} \quad \text{besser:} \quad v = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\text{Geschwindigkeitsdifferenz}}{\text{Zeitdifferenz}} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} \quad (\text{Differenzenquotient})$$

Die **Momentanbeschleunigung** ist der Grenzwert des Differenzenquotienten =
1. Ableitung der Funktion $v(t)$ = 2. Ableitung der Funktion $s(t)$

Momentanbeschleunigung $a(t) = v'(t) = s''(t)$

Bei Beispiel 1 ist $v(t) = -10 \cdot t + 40$. Dann ist die Beschleunigung: $a(t) = -10 \rightarrow$ und das ist die Erdbeschleunigung (eigentlich exakt $9,81 \text{ m/s}^2$)

BEISPIEL 2: Rennauto

Ein Auto fährt mit der Wegstreckenfunktion $s(t) = 6t^2 - t^3/6$

- Welche Geschwindigkeitsfunktion und welche Beschleunigungsfunktion ergeben sich durch Ableiten?
- Wie groß ist die Geschwindigkeit nach 10 Sekunden?
- Wie groß ist die Beschleunigung nach 10 Sekunden?
- Wann ist die Beschleunigung = 0? Und was gilt dort für die Geschwindigkeit?
- Wie groß ist die Höchstgeschwindigkeit?

Lösung:

- $s(t) = 6t^2 - t^3/6$ für Entfernung vom Start
 $s'(t) = v(t) = 12t - t^2/2$ für momentane Geschwindigkeit
 $s''(t) = v'(t) = a(t) = 12 - t$ für momentane Beschleunigung
- $v(10) = 70 \text{ m/s}$
- $a(10) = 2 \text{ m/s}^2$
- $a(t)=0 \rightarrow t = 12 \text{ s} \rightarrow$ dort ist größte Geschwindigkeit
- $v(12) = 72 \text{ m/s} = 259,2 \text{ km/h}$

ÜBUNGEN:

- 1) Bei einem senkrechten Wurf gibt es die Höhenfunktion $h(t) = -5t^2 + 30t$
 - a) Welche Höhe wird nach 2 Sekunden erreicht?
 - b) Welche Geschwindigkeit wird nach 2 Sekunden erreicht?
 - c) Wann ist die Geschwindigkeit = 0 und was bedeutet das?
 - d) Wie groß ist die maximale Höhe?

 - 2) Bei einem senkrechten Wurf gibt es die Höhenfunktion $h(t) = -5t^2 + 45t + 55$
 - a) Welche Höhe wird nach 0, nach 3 und nach 6 Sekunden erreicht?
 - b) Welche Geschwindigkeit wird nach 3 und 6 Sekunden erreicht?
 - c) Wann ist die Geschwindigkeit = 0 und was bedeutet das?
 - d) Wie groß ist die maximale Höhe?
 - e) Wann fällt der Stein auf den Boden (Höhe=0)?

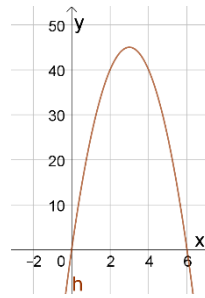
 - 3) Bei einem senkrechten Wurf gibt es die Höhenfunktion $h(t) = -5t^2 + 35t + 20$
 - a) Welche Höhe wird nach 0, 3 und 6 Sekunden erreicht?
 - b) Welche Geschwindigkeit wird nach 3 Sekunden erreicht?
 - c) Wann ist die Geschwindigkeit = 0 und was bedeutet das?
 - d) Wie groß ist die maximale Höhe?
 - e) Wann fällt der Stein auf den Boden (Höhe=0)?
-
- 4) Ein Auto fährt mit der Wegstreckenfunktion $s(t) = 4t^2 - t^3/6$
 - a) Welche Geschwindigkeitsfunktion und welche Beschleunigungsfunktion ergeben sich durchs Ableiten?
 - b) Wie groß ist die Geschwindigkeit nach 6 Sekunden?
 - c) Wie groß ist die Beschleunigung nach 6 Sekunden?
 - d) Wann ist die Beschleunigung = 0? Und was gilt dort für die Geschwindigkeit?
 - e) Wie groß ist die Höchstgeschwindigkeit?

 - 5) Ein Auto fährt mit der Wegstreckenfunktion $s(t) = 3t^2 - t^3/8$
 - a) Welche Geschwindigkeitsfunktion und welche Beschleunigungsfunktion ergeben sich durchs Ableiten?
 - b) Wie groß ist die Geschwindigkeit nach 6 Sekunden?
 - c) Wie groß ist die Beschleunigung nach 6 Sekunden?
 - d) Wann ist die Beschleunigung = 0? Und was gilt dort für die Geschwindigkeit?
 - e) Wie groß ist die Höchstgeschwindigkeit?

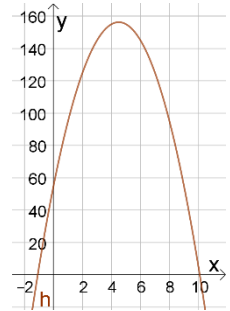
 - 6) Ein Auto fährt mit der Wegstreckenfunktion $s(t) = 2t + 3t^2 - t^3 / 10$
 - a) Welche Geschwindigkeitsfunktion und welche Beschleunigungsfunktion ergeben sich durchs Ableiten?
 - b) Wie groß ist die Geschwindigkeit nach 6 Sekunden?
 - c) Wie groß ist die Beschleunigung nach 6 Sekunden?
 - d) Wann ist die Beschleunigung = 0? Und was gilt dort für die Geschwindigkeit?
 - e) Wie groß ist die Höchstgeschwindigkeit?

Lösungen:

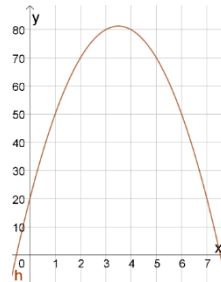
- 1) a) $h(2) = 40 \text{ m}$
 b) $v(2) = 10 \text{ m/s} = 36 \text{ km/h}$
 c) $v(t) = 0 \rightarrow t = 3 \text{ s} \rightarrow$ höchster Punkt erreicht
 d) $h(3) = 45 \text{ m}$



- 2) a) $h(0) = 55 \text{ m}, h(3) = 145 \text{ m}, h(6) = 145 \text{ m}$
 b) $v(3) = 15 \text{ m/s} \quad v(6) = -15 \text{ m/s}$
 c) $h'(t) = 0 \rightarrow t = 4,5 \text{ s} \rightarrow$ höchster Punkt erreicht
 d) $h(4,5) = 156,25 \text{ m}$
 e) $h(t) = 0 \rightarrow t = 10,09 \text{ s}$



- 3) a) $h(0) = 20 \text{ m}, h(3) = 80 \text{ m}, h(6) = 50 \text{ m}$
 b) $v(3) = 5 \text{ m/s} = 18 \text{ km/h}$
 c) $v(t) = 0 \rightarrow t = 3,5 \text{ s}$
 d) $h(3,5) = 81,25 \text{ m}$
 e) $h(t) = 0 \rightarrow t = 7,53 \text{ s}$

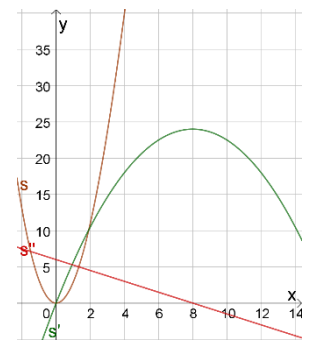


.....

- 4) a) $v(t) = 8t - t^2/2 \quad a(t) = 8 - t$
 b) $v(6) = 30 \text{ m/s} = 108 \text{ km/h}$
 c) $a(6) = 2 \text{ m/s}^2$
 d) $a(t) = 0 \rightarrow t = 8 \text{ s} \rightarrow$ höchste Geschwindigkeit
 e) $v(8) = 32 \text{ m/s} = 115,2 \text{ km/h}$



- 5) a) $v(t) = 6t - 3/8 \cdot t^2 \quad a(t) = 6 - 3/4 \cdot t$
 b) $v(6) = 22,5 \text{ m/s} = 81 \text{ km/h}$
 c) $a(6) = 1,5 \text{ m/s}^2$
 d) $a(t) = 0 \rightarrow t = 8 \text{ s} \rightarrow$ Geschwindigkeit = maximal
 e) $v(8) = 24 \text{ m/s} = 86,4 \text{ km/h}$



- 6) a) $v(t) = 2 + 6t - 3/10 \cdot t^2 \quad a(t) = 6 - 3/5 \cdot t$
 b) $v(6) = 27,2 \text{ m/s} = 97,92 \text{ km/h}$
 c) $a(6) = 2,4 \text{ m/s}^2$
 d) $a(t) = 0 \rightarrow t = 10 \text{ s} \rightarrow$ Geschwindigkeit = maximal
 e) $v(10) = 32 \text{ m/s} = 115,2 \text{ km/h}$

