ONLINEKURS Folgen und Reihen (für Mathematik 2)

Als guten Einstieg in das Thema **<u>FOLGEN</u>** kann man die folgenden Videos verwenden:

1) Folgen (xhochnde): **Hier werden die üblichen Buchstaben für die arithmetische und geometrische Folge gezeigt und auch ein Beispiel für eine Angabe bei einer geometrischen Folge (gut und langsam erklärt)**

2) Zahlenfolgen Übersicht (MathePeter) schnell erklärt und übersichtlich: arithmetisch–Geometrisch–Fibonacci und rekursiv oder explizit

3) Rekursive Folgen (Matheprisma): Hier werden die beliebten Fortsetzungsaufgaben von **Einstellungstests** gezeigt. Mit einer ungewöhnlichen Beschriftung der Folgenglieder: M(n). Außerdem gibt es **interaktives** Mitarbeiten mit Fragen und Antwortmöglichkeit sowie Kontrolle.
   *Am Schluss kommt noch das **Turmspiel** und die **Fibonaccifolge**, die in der Natur vorkommt.*

4) Arithmetische Folge (–Formel) aufstellen (MathemaTrick) **wenn 2 beliebige Folgenglieder gegeben sind – wird auf anschauliche Weise erklärt**

5) Geometrische Folgen berechnen (MathemaTrick) aus 5 verschiedenen Angaben

6) Geometrische Folge als Maturaaufgabe (Manfred)

WISSEN:

Wir sollten jetzt wissen, dass man die Folgen so aufschreiben kann: < 1, 3, 5, 7, 9, …>
oder in der folgenden Aufzählung: $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 7$, $a_5 = 9$, …

Dabei ist das allgemeine Folgenglied a_n und das nächste Folgenglied a_{n+1} und die Nummer n des Folgengliedes wird als Index von a_n sichtbar (a_4 ist das vierte Folgenglied)

Dann gibt es die (explizite) **Folgenformel** für die **arithmetische Folge**: $\boxed{a_n = a_1 + (n-1)\cdot d}$ wobei a_1 das erste Folgenglied und d die Differenz zweier Nachbarfolgenglieder ist ($d = a_{n+1} - a_n$) und das ergibt die **rekursive Darstellung** der arithmetischen Folge: $\boxed{a_{n+1} = a_n + d}$

Ebenso gibt es für die **geometrische Folge** die explizite **Folgenformel**: $\boxed{b_n = b_1 \cdot q^{n-1}}$ wobei b_1 das erste Folgenglied der Folge ist und q der Quotient zweier Nachbarfolgenglieder ($q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$) und das ergibt die rekursive Darstellung der geometrischen Folge: $b_{n+1} = b_n \cdot q$

Als guten Einstieg in das Thema **REIHE** (= Summe von Folgengliedern) kann man die folgenden Videos verwenden:

- REIHEN–Video: (xhochnde) **guter Überblick mit Beispielen**
- Arithmetische Reihenformel von Gauß – Herleitung und Beispiel
- Geometrische Reihenformel – Herleitung und viele Beispiele

WISSEN:

Die Formel für die arithmetische Reihe ist: $\boxed{s_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2} = (2a_1 + (n-1) \cdot d) \cdot \frac{n}{2}}$

Die Formel für die geometrische Reihe ist: $\boxed{s_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}}$

⇨ Siehe Formelsammlung Seite 11

INTERAKTIVE ÜBUNGEN:

Das dürfte jetzt genügen, um selber zuerst **interaktiv** Beispiele rechnen zu können:

A) Was ist es? Arithmetisch oder geometrisch?
B) Textaufgaben, um rekursive Folgen zu bestimmen (KhanAkademy)
C) **Video mit Aufgabenstopps**: https://www.youtube.com/watch?v=k9Vsoe7XHIs

ÜBUNGEN:

Aufgabentyp	**Bei Folgen und Reihen (Gurtner/ Moser)**	**Bei Folgen (Gut)**
Mit Formel umgehen	Beispiel 1	
Typ von Folge erkennen		Beispiel 4,5
Folgenglieder bestimmen	Beispiel 2,3, 9,10	
Summen berechnen	Beispiel 4,7,8,11,12	
Gemischte Textaufgaben	Beispiel 15–18	Beispiel 6–10

PRÜFUNGSBEISPIEL:

a) Von einer **arithmetischen Folge** sind gegeben: $a_2 = 4$, $a_{10} = 24$. Berechnen Sie d, a_1, a_{12} und s_{12}!	3 Pkt	
b) Ein Turm besteht aus 8 Würfeln übereinander. Die Seitenlänge des ersten Würfels ist 10 cm. Der zweite und alle folgenden haben eine Seitenlänge, die jeweils um 20% kleiner ist als die vorige Seitenlänge. Welchen Faktor q ergibt das? Berechnen Sie die Höhe des Turms! (**geometrische Reihe**)	2 Pkt	

Lösung des Prüfungsbeispiels:

a) Wir suchen uns die Folgenformel heraus: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$
Und ersetzen n durch 10: $a_{10} = a_1 + (10-1) \cdot d$ ➔ $a_{10} = a_1 + 9 \cdot d$
Und auch durch 2: $a_2 = a_1 + (2-1) \cdot d$ ➔ $a_2 = a_1 + d$
Das 2. kann man umformen auf a_1: $\boxed{a_1 = a_2 - d}$ und dann in die erste Formel einsetzen
$a_{10} = (a_2 - d) + 9d$ ➔ $a_{10} = a_2 + 8d$
Und nun kann man die Zahlen einsetzen: $24 = 4 + 8d$

- Das kann man umformen auf d: $d = (24-4):8$ ➔ **$d = 2,5$**

- Wir setzen das in $\boxed{a_1}$ ein: $a_1 = 4 - 2,5$ ➔ **$a_1 = 1,5$**

- Und können nun auch a_{12} berechnen: $a_{12} = a_1 + 11d$ ➔ $a_{12} = 1,5 + 11 \cdot 2,5$ ➔ **$a_{12} = 29$**

- Die Summe ergibt sich mit der Summenformel: $s_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}$ ➔ $s_{12} = (1,5+29) \cdot \frac{12}{2}$
  ⇨ **$s_{12} = 183$**

b) Offensichtlich ist das hier eine geometrische Folge mit der Formel $b_n = b_1 \cdot q^n$ gemeint.
Und **$b_1 = 10$**. Der Faktor q ergibt sich aus den 20% Abnahme. Hier verwende ich das Rezept:
UM 20% WENIGER = AUF 80% BRINGEN = MAL 0,80
⇨ Daher ist **$q = 0,80$**

Die Höhe des Turmes ist eine Summe der einzelnen 8 Seitenlängen (Seite = Höhe!), also

$S_n = b_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1}$ ➔ $s_8 = 10 \cdot \frac{0,8^8-1}{0,8-1}$ ➔ **$s_8 = 41,6$ cm**