Infinitesimalrechnung

1. Grenzwerte von Funktionen

Hier können wir anschließen an das Kapitel: Grenzwert einer Folge. Da ging es darum, z.B. den Grenzwert der Folge $\langle\frac{2n-1}{n+3}\rangle$ für n gegen Unendlich (n→∞) zu bestimmen. Da war der Trick dabei, Zähler und Nenner durch n zu dividieren und dann den Limes durchzuführen, wobei man weiß, dass Terme wie $\frac{1}{n}$ für n gegen Unendlich gegen Null gehen.

Das kann man auf Funktionen erweitern:

Der **Linksseitige GRENZWERT $f(x_0-)$ einer Funktion f(x) an der Stelle x_0** ergibt sich, wenn jede Folge $<x_n>$ von Zahlen, die kleiner als x_0 sind und gegen x_0 konvergieren zur Folge haben, dass der Limes der Folge der Funktionswerte $\lim\limits_{x_n \to x_{0-}} f(x_n)$ gegen einen festen Zahlenwert $f(x_0-)$ gehen.

Analog ist **der rechtsseitige Grenzwert** $f(x_0+)$ **einer Funktion** definiert

Der (allgemeine) **Grenzwert** existiert wenn links– und rechtsseitiger Grenzwert existieren und gleich sind.

Beispiel 1: Der linksseitige Grenzwert von $f(x) = x^2$ an der Stelle $x_0 = 1$ ergibt sich z.B. mit der Folge

$x_n = 1-\frac{1}{n}$ ➔ eigesetzt in die Funktion ergibt sich: $f(1-\frac{1}{n}) = (1-\frac{1}{n})^2 = 1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}$ und der Grenzwert ergibt:

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{n \to \infty} (1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}) = 1$$

Der rechtsseitige Grenzwert von $f(x) = x^2$ an der Stelle $x_0 = 1$ ergibt sich z.B. mit der Folge

$x_n = 1+\frac{1}{n}$ ➔ eigesetzt in die Funktion ergibt sich: $f(1+\frac{1}{n}) = (1+\frac{1}{n})^2 = 1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}$ und der Grenzwert ergibt:

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{n \to \infty} (1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}) = 1$$

GRENZWERTSÄTZE:

Der Grenzwert der Summe, Differenz und Produkt von Funktionen ist die Summe, Differenz und Produkt der Grenzwerte der Teilfunktionen z.B.: $\lim [f(x) + g(x)] = \lim f(x) + \lim g(x)$ für x➔ x_0

Der Grenzwert des Quotienten zweier Teilfunktionen existiert, wenn der Grenzwert des Nenners nicht Null ist und ist der Quotient der Grenzwerte: $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$ für x➔ x_0

Das gilt für rechtsseitige, linksseitige und allgemeine Grenzwerte gleichermaßen.

Beispiel 2: Bestimme die (rechts– und linksseitigen) Grenzwerte von

a) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ für x→1

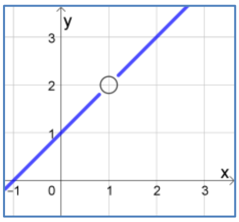
b) $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ für x→2

c) Die **Heaviside–Funktion** ist so definiert, dass sie für Zahlenwerte kleiner als 0 den Funktionswert 0 hat und für Zahlenwerte größer gleich Null den Funktionswert 1 hat:

$$H(x) = \begin{cases} 0 \; für \; x < 0 \\ 1 \; für \; x \geq 0 \end{cases} \quad \text{für } x \to 0$$

2) Lösung:

a) Wenn wir ohne Umformung x=1 in die Funktion f(x) = $\frac{x^2-1}{x-1}$ einsetzen, so entsteht der Bruch $\frac{0}{0}$, der keine Zahl zugeordnet werden kann (Division durch 0) – Das ist eine Ausnahmestelle der Definitionsmenge ($D=\mathbb{R}\backslash\{1\}$)

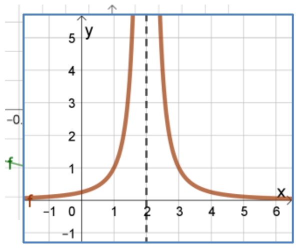


Den Grenzwert können wir hier bekommen, wenn wir die binomische Formel anwenden:
Wir zerlegen den Bruch mit der binomischen Formel $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{(x-1)}$ und kürzen (x−1) heraus ➔ f(x) = (x+1). Das dürfen wir nur bei der Grenzwertuntersuchung!
Jetzt wird der **Grenzwert** $\lim_{x\to1}(x+1)$ = **2**
Das ist der links–und rechtsseitige Grenzwert gleichzeitig.
Diesen Fall nennt man Fall einer **LÜCKE** der Funktion (siehe Grafik mit Kreis bei x=1)

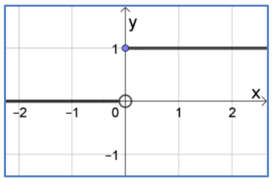
b) Die Funktion $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ ist für x=2 nicht definiert wegen der Division durch 0. Zur Bestimmung des linksseitigen Grenzwertes nehmen wir die Folge $x_n = 2 - \frac{1}{n}$

➔ $f(x_n) = \frac{1}{(2-\frac{1}{n}-2)^2} = \frac{1}{\frac{1}{n^2}} = n^2$

Der Grenzwert ergibt sich zu $\lim_{n\to\infty}(n^2) = \infty$ ➔ **existiert also nicht als reelle Zahl**
Dieser Fall nennt sich **POLSTELLE** der Funktion (=**Unendlichkeitsstelle** der Funktion)



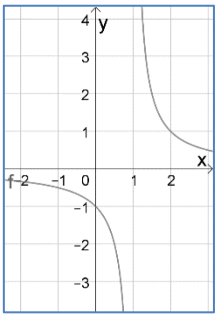
c) Der linksseitige Grenzwert ist H(0−) = 0
Der rechtsseitige Grenzwert ist H(0+) = 1
Daher ist diese Funktion bei Null eine **SPRUNGFUNKTION**.



Beispiel 3: Welche Art von **Unstetigkeit** existiert bei f(x) = $\frac{x+1}{x^2-1}$?

Lösung: Zerlegt man den Nenner mit Hilfe der Binomischen Formel f(x) = $\frac{x+1}{(x+1)*(x-1)}$, so ergibt das zwei Unstetigkeitsstellen bei x = 1 und bei x = −1. Nach Kürzung durch (x+1) entsteht g(x) = $\frac{1}{(x-1)}$. Diese Funktion hat eine **Polstelle** bei x = 1 (sieht man auch in der Grafik)

Durch das Kürzen hat die ursprüngliche Funktion den Term (x+1) im Nenner (und Zähler) verloren und daher ist das eine **LÜCKE** (behebbar) bei x = −1 (sieht man nicht in der Grafik)



2. Stetigkeit von Funktionen

Funktionen sind dann **stetig**, wenn sie in einem Zug gezeichnet werden können (ohne Absetzen vom Blatt) – das wäre die plausible Definition, exakt müsste sie so lauten:

Eine Funktion f(x) ist an der Stelle x_0 **stetig**, wenn der rechtsseitige und linkseitige Grenzwert der Funktion gleich dem Funktionswert ist: $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0)$

d) Eine Funktion f(x) hat an der Stelle x_0 eine **LÜCKE (behebbare Unstetigkeitsstelle)**, wenn der rechtsseitige und linkseitige Grenzwert der Funktion gleich sind aber verschieden von $f(x_0)$:
$\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0-} f(x) \neq f(x_0)$
Man kann diese Stelle „beheben“ indem man $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$ umdefiniert

e) Eine Funktion f(x) hat an der Stelle x_0 eine **POLSTELLE (Unendlichkeitsstelle)**, wenn der rechtsseitige **oder** linkseitige Grenzwert der Funktion ∞ ergeben. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$

f) Eine Funktion f(x) hat an der Stelle x_0 eine **SPRUNGSTELLE,** wenn der rechtsseitige und linkseitige Grenzwert der Funktion existieren, aber verschieden sind: $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$

Die **DEFINITIONSMENGE** einer Funktion darf keine Polstelle umfassen

Wie erkennt man eine Unstetigkeitsstelle am Funktionsterm?

- Bei Bruchfunktionen: Nullstellen des Nenners ergeben Polstellen oder Lücken
- Bei abschnittsweise (stückweise) definierten Funktionen an den Schnittstellen

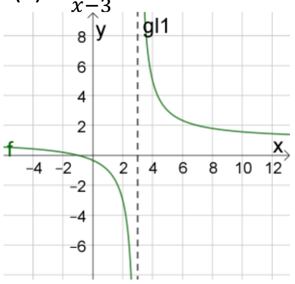
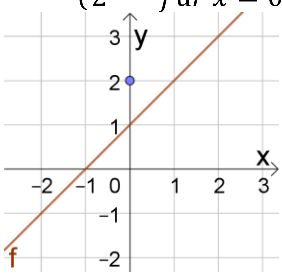
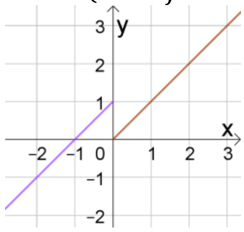
Wie erkennt man Definitionsmenge–Ausnahemstellen?

- Bei Wurzelfunktionen: wenn das innere Argument negativ wird
- Bei Logarithmenfunktionen: wenn das innere Argument kleiner oder gleich Null wird
- Bei Exponentialfunktionen, wenn die Basis negativ ist (geht überhaupt nur, wenn die Definitionsmenge die ganzen Zahlen sind)

Beispiel 4:
Bestimme die Unstetigkeitsstellen der Funktionen, deren Typ und erstelle dazu die Definitionsmenge (auf der Grundmenge ℝ)

a) $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$, b) $g(x) = \begin{cases} x+1 & für\ x \neq 0 \\ 2 & für\ x = 0 \end{cases}$ c) $h(x) = \begin{cases} x+1 & für\ x < 0 \\ x & für\ x \geq 0 \end{cases}$

Lösung:

$f(x) = \frac{x+1}{x-3}$  $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \frac{4}{\pm 0} = \pm\infty$ **POLSTELLE in x=3** f(3) existiert nicht ➔ Definitionsmenge **D** = $\mathbb{R}\backslash\{3\}$	$g(x) = \begin{cases} x+1 & für\ x \neq 0 \\ 2 & für\ x = 0 \end{cases}$  $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 1$ **LÜCKE in x=0** f(0) = 2 existiert ➔ **D** = ℝ	$h(x) = \begin{cases} x+1 & für\ x < 0 \\ x & für\ x \geq 0 \end{cases}$  $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = 1$ $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 0$ **SPRUNGSTELLE in x=0** f(0) = 0 existiert ➔ **D** = ℝ

3. Differenzieren von Funktionen

Im Hauptkurs haben wir gelernt, wie man die **1.Ableitung einer Funktion** durch das Differenzieren bekommt. So kann man die **Steigung einer Funktion** an jeder Stelle bestimmen. Das geht einfach, wenn man die **Ableitungsregeln** kennt. Aber wie hat man diese Regeln gefunden?

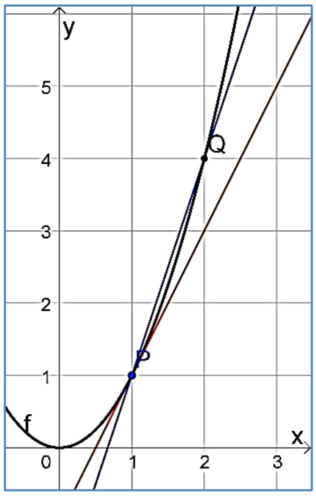
Beispiel 5: Berechne die momentane Steigung der Funktion f(x) = x^2 zuerst an der Stelle x=1, dann allgemein
a) Mit Hilfe der Ableitungsregel
b) Mit dem Differentialquotienten

Lösung:

a) Das ist einfach, hier ist die Ableitung f'(x) = 2·x und damit f'(1) = 2·1 = 2

b) Für die Verwendung des Differenzialquotienten für die Steigung an einem Punkt nehmen wir als Näherung die Steigung zwischen zwei Punkten, nämlich P(1|1^2) und Q(x|x^2):
$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{x^2-1^2}{x-1}$ und das lässt sich mit der binomischen Formel zerlegen in $\frac{(x-1)*(x+1)}{(x-1)}$ Kürzt man jetzt den Faktor (x−1), so erhält man als Steigung k = **(x+1)** zwischen zwei Kurvenpunkten P und Q. Nimmt man x=2, so erhält man als Steigung **(1+2)** = **3**

Es geht aber auch, die Steigung der Tangente zu berechnen, indem man den Grenzwert des Differenzenquotienten bei Annäherung des x−Wertes an 1 als Differenzialquotient definiert: $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{x^2-1^2}{x-1} = \cdots = \lim\limits_{x\to 1}(\boldsymbol{x+1})$ = 2



Der Differentialquotient $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)$ **ist der Grenzwert des Differenzenquotients** $\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)$

Wie geht das Differenzieren mit dem Differentialquotienten allgemein?

Für den Fall der Funktion f(x) = x^n ergibt sich mit der allgemeinen binomischen Formel

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right) = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{x^n-{x_0}^n}{x-x_0}\right) = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{(x-x_0)*(x^{n-1}+x^{n-1}x_0+x^{n-2}{x_0}^2+\cdots)}{x-x_0}\right) =$$

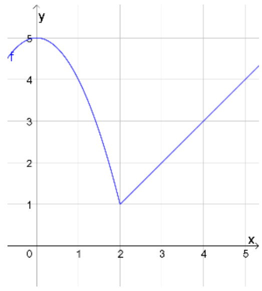
$$= \lim_{x\to x_0}(x^{n-1} + x^{n-1}x_0 + x^{n-2}{x_0}^2 + \cdots) = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{x_0^{n-1}} \quad \textbf{(= die Ableitung von } \boldsymbol{x_0^n}\textbf{)}$$

Beispiel 6: Berechne den Differenzialquotienten der Funktion f(x) = x^2 an der Stelle x=5

Lösung: $\lim\limits_{x\to 5}\left(\frac{f(x)-f(5)}{x-5}\right) = \lim\limits_{x\to 5}\left(\frac{x^2-5^2}{x-5}\right) = \lim\limits_{x\to 5}\left(\frac{(x-5)*(x+5)}{x-5}\right) = \lim\limits_{x\to 5}((x+5))$ = 5 + 5 = 10

4.Differenzierbarkeit von Funktionen

Die Ableitung einer Funktion (=Steigung) muss nicht an jeder Stelle existieren. Bei der Funktion rechts ist die Steigung im Punkt (0|0) bei x=2 einerseits (links) negativ und andererseits (rechts) positiv – und daher unbestimmt. Deshalb unterscheidet man Funktionen, die überall differenzierbar sind von Funktionen die an bestimmten Stellen nicht differenzierbar sind.



Definition:

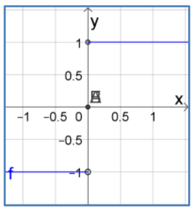
Eine relle Funktion f(x): D→ℝ heißt **an der Stelle x_0 differenzierbar**, wenn f'(x_0) = $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert.

Ist die Funktion überall (aus der Definitionsmenge D) differenzierbar, so heißt die Funktion **differenzierbar**.

Beispiele: In ihrem jeweiligen Definitionsbereich(!) sind folgende Funktionen (überall) differenzierbar: Potenzfunktionen, Polynomfunktionen, rationale Funktionen, Exponentialfunktionen, Logarithmusfunktionen, Winkelfunktionen

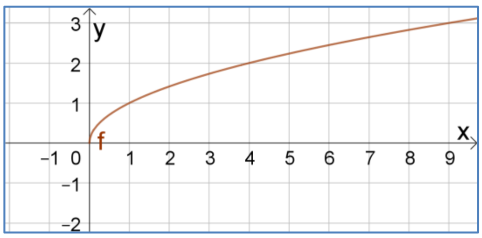
- Ist eine Funktion an einer Stelle x_0 differenzierbar, so ist sie dort auch stetig, daher ist die Stetigkeit eine Voraussetzung für die Differenzierbarkeit

Negativbeispiele:

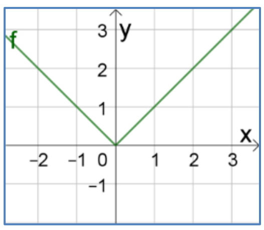


- Die Funktion Vorzeichenfunktion f(x) = sign(x) = $\begin{cases} -1 \ \ f\ddot{u}r\ x < 0 \\ 0 \ \ f\ddot{u}r\ x = 0 \\ 1 \ \ f\ddot{u}r\ x > 0 \end{cases}$

  ist an der Stelle x=0 nicht stetig und daher auch nicht differenzierbar



- Die Wurzelfunktion f(x) = $\sqrt{x}$ ist zwar an der Stelle x=0 noch definiert, aber dort nicht differenzierbar, weil dort die Steigung ∞ ist



- Die Betragsfunktion f(x) = |x| ist bei x=0 nicht differenzierbar weil 2 Steigungen hier zusammentreffen (mit k= 1 und k= −1) 2

5. Integrierbarkeit von Funktionen

Gibt es überhaupt Funktionen, die nicht integrierbar sind?

Dazu müssen wir uns einerseits die **Stammfunktionen** ansehen, die nicht immer existieren. Die Stammfunktion der quadratischen Exponentialfunktion $\int e^{x^2}dx$ existiert nicht und $\int e^{-x^2}dx$ ebenso nicht. Erkennen kann man auf den ersten Blick nicht, ob eine Funktion eine Stammfunktion hat oder nicht. Aber es gibt Listen der Integrale und Computeralgebrasysteme, die können alles Ausrechenbare ausrechnen (z.B. WolframAlpha). Wenn die das nicht können, dann gibt es (derzeit) keine Stammfunktion.

Die **bestimmten Integrale**, die als Flächen unter der Kurve definierbar sind, sind meistens existent. Aber auch hier gibt es Ausnahmen. Eine Funktion ist so verrückt definiert: Bei einem Wert von x, der einer rationalen Zahl entspricht, ist die Funktion 1 und bei einer irrationalen Zahl ist die Funktion 0:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \ wennn\ x\ rational\ ist \\ 0\ wenn\ x\ irrational\ ist \end{cases}$$

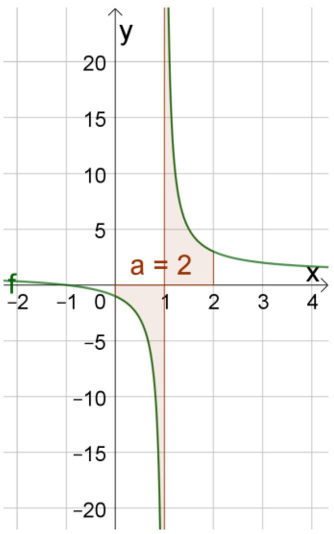
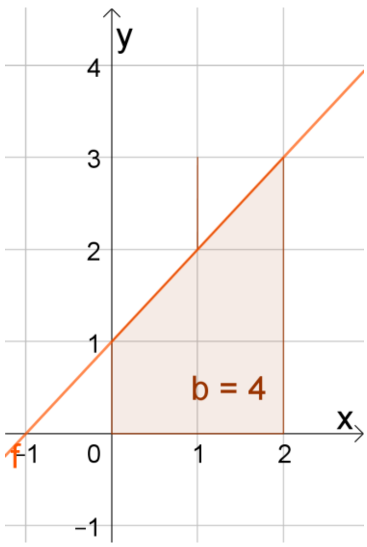
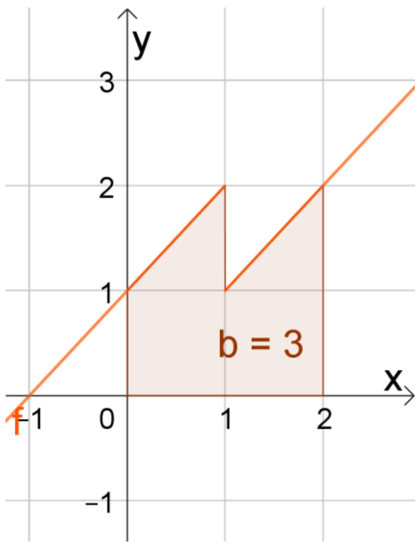
Diese Funktion ist in jedem Teilintervall der reellen Zahlen immer gleichzeitig 0 und 1. Daher ist die Obersumme 1 und die Untersumme 0 – und diese konvergieren nicht zueinander. Daher ist diese Funktion nicht integrierbar.

Wie sieht es mit der **Flächenbildung** bei **Unstetigkeitsstellen** aus?

Beispiel 6:
Bestimme die Fläche unter den Funktionen zwischen 0 und 2 (mit Unstetigkeit bei x=1)

a) f(x) = $\frac{x+1}{x-1}$ **(Polstelle)** b) g(x) = $\begin{cases} x+1\ für\ x \neq 1 \\ 2 \quad\ \ für\ x = 1 \end{cases}$ **(Lücke)** c) h(x) = $\begin{cases} x+1\ für\ x < 1 \\ x \quad\ \ für\ x \geq 1 \end{cases}$ **(Sprung)**

Lösung:

a) Geogebra zeigt die Lösung a=2	b) Geogebra zeigt die Lösung b=4	c) Geogebra zeigt die Lösung b=3
		
Integriere ich von 1 bis 2, so gibt Geogebra ∞ als Lösung an!!! Sehr widersprüchlich!	Das ist richtig, da ein Punkt keine Fläche hat	Das ist richtig, man kann die Fläche in 2 Teile teilen

Bei **Unendlichkeitsstellen** weiß man nicht, ob es eine endliche Fläche gibt oder nicht, da muss man mit dem Limes arbeiten, um die Lösung zu finden. Das darf an der TU erklärt werden!

Übungen:

1) Bestimme den rechtsseitigen und linksseitigen Grenzwert der Funktion f(x) an der Stelle x_0

a) $f(x) = \frac{1}{x}$ bei $x_0 = 0$ b) $f(x) = \frac{4}{1-x}$ bei $x_0 = 1$ c) $f(x) = \frac{(x-1)^2}{(x-1)}$ bei $x_0 = 1$

d) $f(x) = \sqrt{x-2}$ bei $x_0 = 2$ e) $f(x) = \ln(x)$ bei $x_0 = 1$ f) $f(x) = \frac{2}{1+e^{-\frac{1}{x}}}$ bei $x_0 = 0$

g) $f(x) = \begin{cases} x \ \text{für}\ x < 1 \\ 1 \ \text{für}\ x \geq 1 \end{cases}$ bei $x_0 = 1$ h) $f(x) = \begin{cases} x \ \text{für}\ x < 1 \\ 2 \ \text{für}\ x \geq 1 \end{cases}$ bei $x_0 = 1$

i) $f(x) = \begin{cases} -x+3 \ \text{für}\ x < 3 \\ x-2 \ \text{für}\ x \geq 3 \end{cases}$ bei $x_0 = 3$ j) $f(x) = \begin{cases} x^2 \ \text{für}\ x < 0 \\ x-1 \text{für}\ x \geq 0 \end{cases}$ bei $x_0 = 0$

2) Suche die **Unstetigkeitsstelle** und bestimme die Art der Unstetigkeitsstelle
(**Polstelle =** Unendlichkeitsstelle oder **Lücke** = behebbare Unstetigkeit oder **Sprungstelle**)
[Hinweis: Verwende die Binomische Formel]

a) $f(x) = \frac{2x}{x+4}$ b) $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$ c) $f(x) = \frac{x+2}{x^2-4}$ d) $f(x) = \frac{x^2-4x+4}{x-2}$

e) $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$ f) f(x) = sign(x) (gibt das Vorzeichen von x an) $\text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & \text{für}\ x < 0 \\ 0 & \text{für}\ x = 0 \\ 1 & \text{für}\ x > 0 \end{cases}$

g) $f(x) = \begin{cases} x-3 \ \text{für}\ x \geq 2 \\ x+3 \ \text{für}\ x < 2 \end{cases}$ h) $f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{für}\ x < 0 \\ x & \text{für}\ 0 \leq x < 3 \\ 6-x & \text{für}\ x \geq 3 \end{cases}$

3) Berechne den **Differenzialquotienten** von
a) f(x) = 2x an der Stelle x=5 b) f(x) = x^2 an der Stelle x=2 c) f(x) = x+5 an der Stelle x=4

Lösungen:

1) a) f(0−)= −∞ f(0+) = +∞ b) f(1−) = +∞ f(1+) = −∞ c) f(1−) = 0 f(1+) = 0
d) siehe unten e) f(1−) = −0 f(1+) = +0 f) f(0−) = 0 f(0+) = 2
g) f(1−) = 1 f(1+) = 1 h) f(1−) = 1 f(1+) = 2
i) f(3−) = 0 f(3+) = 1 j) f(0−) = 0 f(0+) = −1

2) a) Polstelle bei x = −4 b) Lücke bei x = −2 c) Polstelle bei x = 2 und Lücke bei x = −2
d) Lücke bei x = 2 e) Polstelle bei x = −3 und Lücke bei x = 3 f) Sprungstelle bei 0
g) Sprungstelle bei 2 h) Sprungstelle bei x = 0, stetig bei x = 3

3a) $\lim_{x\to5}\left(\frac{f(x)-f(5)}{x-5}\right) = \lim_{x\to5}\left(\frac{2x-2*5}{x-5}\right) = \lim_{x\to5}\left(\frac{2*(x-5)}{x-5}\right) = \lim_{x\to5}(2) = 2$

3b) $\lim_{x\to2}\left(\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\right) = \lim_{x\to2}\left(\frac{x^2-2^2}{x-2}\right) = \lim_{x\to2}\left(\frac{(x-2)*(x+2)}{x-2}\right) = \lim_{x\to2}(x+2) = 2+2 = 4$

Speziell:
Lösung für 1d) $f(x) = \sqrt{x-2}$
Für den <u>linksseitigen Grenzwert</u> definiere ich die Folge $x_n = 2 - \frac{1}{n}$ und so wird die Funktion:
$f(x_n) = \sqrt{2-\frac{1}{n}-2} = \sqrt{-\frac{1}{n}}$ Da dies undefiniert ist, gibt es <u>keinen Linksseitigen Grenzwert</u>!
Für den rechtsseitigen Grenzwert definiere ich die Folge $x_n = 2 + \frac{1}{n}$ und so wird die Funktion:
$f(x_n) = \sqrt{2+\frac{1}{n}-2} = \sqrt{+\frac{1}{n}}$ und damit der <u>rechtsseitige Grenzwert</u>: $\lim_{x\to2+} f(x) = \lim_{n\to\infty}\sqrt{+\frac{1}{n}}$ **= 0**