

**Exponentielles
Wachstum
+ Zerfall**

Eine Anfangsgröße G wächst **exponentiell** in Abhängigkeit von n (z. B. der Zeit), wenn in gleichen Abständen von n (z. B. Zeitspannen) immer mit demselben Faktor q multipliziert wird. Man berechnet G_n für n Abstände (z. B. Zeitspannen) mit der Formel:
 $G_n = G \cdot q^n$ q heißt **Wachstumsfaktor**
 $p\%$ mit $q = 1 + \frac{p}{100}$ heißt **Wachstumsrate** (Änderungsrate)

gegeben: Heutige Miete $G = 400$ €
 Jährliche Wachstumsrate $p\% = 5\%$
 gesucht: Miete nach 6 Jahren
 Rechnung: Wachstumsfaktor $q = 1,05$
 $G_6 = 400 \cdot 1,05^6 = 536,038\dots$
 Nach 6 Jahren beträgt die Miete 536,04 €.

Algenlänge bei Versuchsbeginn $G = 5$ cm.
 Wöchentliche Wachstumsrate $p\% = 150\%$.
 Algenlänge nach 4 Wochen?
 $q = 1 + \frac{150}{100} = 1 + 1,5 = 2,5$
 $G_4 = 5 \cdot 2,5^4 = 195,312\dots$
 Algenlänge nach 4 Wochen: ca. 1,95 m.

- 1) Ein Mietvertrag sieht eine jährliche Mieterhöhung von 6% vor. Die Miete beträgt heute 650 €. Wie hoch ist sie in 5 Jahren? Ist die Steigerung innerhalb von 5 Jahren größer als 30% ($5 \cdot 6\%$)? Wie hoch ist sie?
- 2) Angenommen, der Preis G für das Auto steigt jährlich um $p\%$. Berechne seine Preise nach 5 Jahren und nach 10 Jahren.

a) $G = 12\,000$ € $p\% = 3\%$	b) $G = 15\,500$ € $p\% = 3,7\%$	c) $G = 27\,300$ € $p\% = 4\frac{1}{2}\%$
-----------------------------------	-------------------------------------	--
- 3) Prognose: Der Literpreis für Super-Benzin steigt ab dem Jahr 2000 von 0,90 € jährlich um 10%.
 - a) Wie hoch sind die Preise 2005, 2010, 2015 und 2020?
 - b) Zeichne eine Graphen für die Preisentwicklung.
- 4) Angenommen, ein umweltschädliches Gas nimmt jährlich um 2,3% zu. Um wie viel Prozent und mit welchem Faktor steigt die Gasmenge innerhalb von 30 Jahren?
- 5) Im Juli 2008 lebten im Hongkong nach Schätzungen 7 018 636 Menschen. Das Bevölkerungswachstum beträgt ca. 0,532%. Wie viele Einwohner wird die Millionenstadt bei gleichem Wachstum im Jahre 2020 haben?
- 6) In Mexiko lebten 2008 ca. 103,3 Mio Einwohner. Gegenüber dem Vorjahr waren dies laut CIA World Factbook 1,142% mehr.
 - a) Wie viele Einwohner wird das Land bei gleichem Wachstum 2018 haben?
 - b) Nach wie vielen Jahren wird Mexiko bei diesem Bevölkerungswachstum 110 Mio. Einwohner haben?
- 7) In einem See nimmt die Helligkeit pro Meter Wassertiefe um 18% ab. An der Oberfläche beträgt die Helligkeit noch 100 LUX (Lichteinheit). Wie viele Lichteinheiten sind es noch in 10 m Wassertiefe?
- 8) Ein radioaktives Material zerfällt so, dass seine Menge stündlich um 9,2% abnimmt. Nach wie vielen ganzen Stunden ist erstmals weniger als 1/5 der Anfangsmenge vorhanden?



- 9) Bei 0°C Außentemperatur nimmt die Temperatur eines Heißgetränkes in der Thermoskanne stündlich um 14 % ab. Nach 4 Stunden werden in der Kanne 54 °C gemessen.
Wie heiß war das Getränk beim Einfüllen?
- 10) Bei einer schlecht eingeschenkten Maß Bier beträgt die Schaumhöhe anfangs 10 cm. Um das Bier einigermaßen trinken zu können, wartet der Gast eine gewisse Zeit. Nach 3 Minuten ist die Schaumhöhe auf die Hälfte zurückgegangen.
- Stelle die Zerfallsgleichung für den Bierschaumzerfall auf.
 - Berechne, wann die Schaumhöhe auf 1 cm zurückgegangen ist.
 - Bei einem anderen Gast beträgt die Schaumhöhe nach drei Minuten noch 3 cm. Wie war die Schaumhöhe nach dem Einschenken.
 - Mache plausibel, wann der Zerfall am stärksten ist.
- 11) Herr Meier hat eine größere Summe Geld gewonnen und legt sie für 3 Jahre zu einem Zinssatz von 2% jährlich an.
Nach 3 Jahren bekommt er von der Bank 53060,40 € ausbezahlt.
- Berechne wie viel Geld er angelegt hatte .
- 12) Im Jahre 2005 waren es 250 Einwohner eines Dorfes. In Folge von Abwanderung sind es 2015 nur mehr 205 Einwohner.
- Nimm an, es ist exponentieller Zerfall: Wann werden es nur mehr 100 Einwohner sein?
 - Nimm an, es ist linearer Zerfall. Wann werden es nur mehr 100 Einwohner sein?
-

Lösungen:

- 869,85€ Steigerung = 33,8%
- a) 13911,29€ und 16127€ b) 18587,69€ und 22290,47€ c) 34020,77€ und 42396,07€
- a) 1,45 2,33 3,76 6,05 Grafik →
- Mit dem Faktor 1,978 um 97,8%
- 7 480 052 Einwohner im Jahre 2020
- 115,7 Mio. Einwohner
- 13,74 LUX
- Nach 16,7 Stunden
- Es war 98,7° heiß
- a) $N(t) = 10 \cdot 0,7937^t$ b) 9,96 min c) 6cm d) am Anfang zerfällt der Schaum schneller
- 50 000€ hatte er angelegt
- a) nach 36 Jahren im Jahre 2051 b) nach 23 Jahren im Jahre 2038

