Änderungs-Maße

Gegeben ist die Temperaturkurve eines Tages:

$T(x) = \frac{1}{8}x^3 - 2x^2 + 8x + 4$, wobei x die Stunden sind und T die Temperatur in °C

Absolute Änderung

Frage: Wie groß ist die absolute Änderung der Temperatur im Zeitintervall [0;2]

Antwort: $\Delta T = T(2) - T(0) = 13° - 4° = 9°$ also ist das die **Temperaturdifferenz**

Relative Änderung (+ in Prozent)

Frage: Wie groß ist die relative Änderung der Temperatur im Zeitintervall [0;2]

Antwort: $\frac{\Delta T}{T(0)} = \frac{T(2)-T(0)}{T(0)} = \frac{13-4}{4} = 2{,}25 = 225\%$

das ist also die **Temperaturdifferenz bezogen auf den Ausgangswert**

Mittlere Änderungsrate / Steigerung / Steigung k

Frage: Wie groß ist die mittlere Änderungsrate der Temperatur im Zeitintervall [0;2]

Antwort: $\frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{T(2)-T(0)}{2-0} = \frac{13-4}{2-0} = 4{,}5°/\text{Stunde}$

das ist also die Temperaturdifferenz dividiert durch die x–Differenz und damit die **mittlere Änderung (Zunahme) der Temperatur pro Stunde**

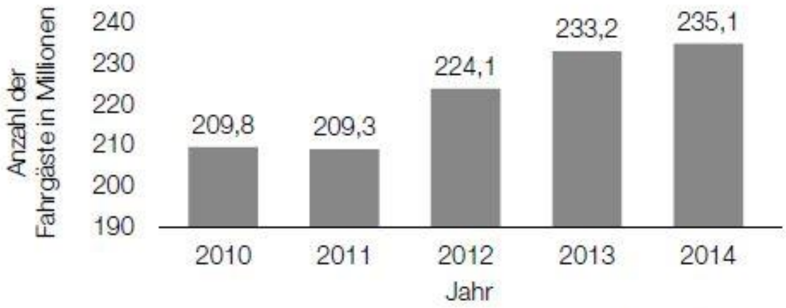
Übungen:

1) Berechnen Sie die absolute, die relative Änderung und die mittlere Änderungsrate der Höhe eines Balles, der nach 2 Sekunden die Höhe 4,5m und nach 4 Sekunden die Höhe 6m erreicht mit den richtigen Einheiten!
2) Die Funktion R(t) gibt die Restmüllmenge in den Jahren 2000 bis 2010 in Graz an:
   $R(t) = 120\,t^2 + 80\,t + 41072$ [t ist die Zeit in Jahren seit 2000, R(t) ist die Restmüllmenge in Tonnen]
   – Berechnen Sie die absolute, die relative Änderung und die mittlere Änderungsrate für t=5 bis t=9 und geben Sie die richtige Einheit dazu an.
3) Die Schallgeschwindigkeit beeinflusst die Tonhöhe der Blockflöte. Der Zusammenhang zwischen der Schallgeschwindigkeit und der Temperatur kann durch die folgende Funktion c dargestellt werden:

   $$c(T) = 331{,}5 \cdot \sqrt{1 + \frac{T}{273{,}15}}$$

   [T ... Temperatur in °C, c(T) ... Schallgeschwindigkeit in Metern pro Sekunde (m/s)]
   – Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate der Schallgeschwindigkeit von 19 °C bis 35 °C.

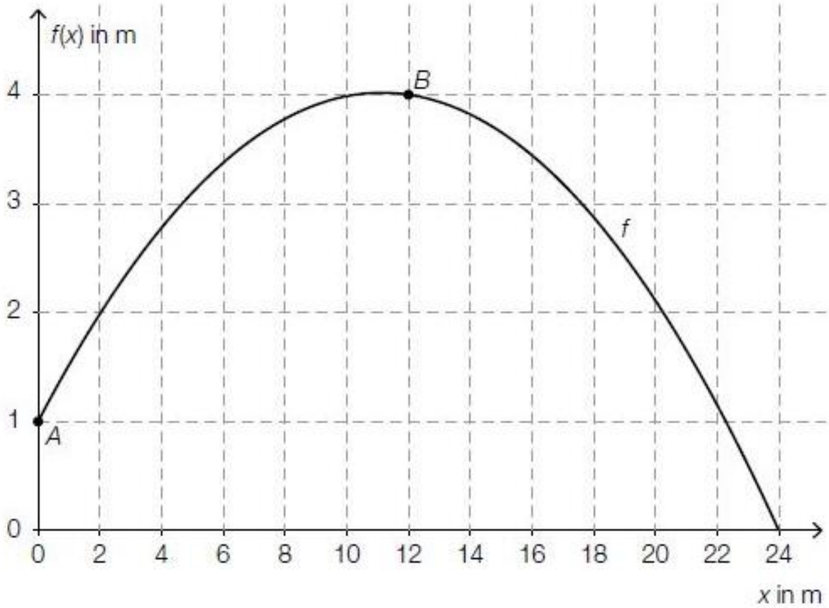
4) Im nachstehenden Diagramm sind die Fahrgastzahlen der Österreichischen Bundesbahnen für die Jahre 2010 bis 2014 dargestellt.



Datenquelle: Agentur für Passagier- und Fahrgastrechte (Hrsg.): *Fahrgastrechte-Statistik Bahn 2014*, 2016, S. 4. https://www.apf.gv.at/files/1-apf-Homepage/1g-Publikationen/Fahrgastrechtestatistik-2014.pdf [22.11.2018].

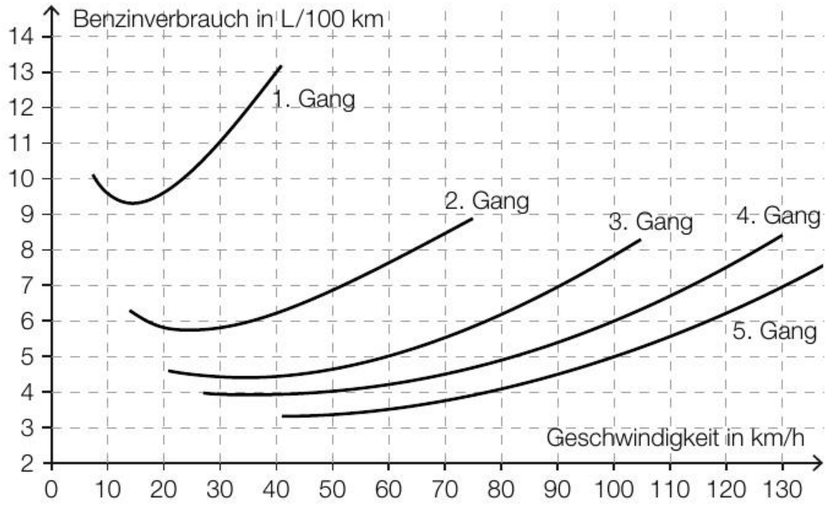
a) Berechnen Sie die absolute Zunahme der Fahrgastzahlen von 2010 bis 2014
b) Es wurde folgende Berechnung durchgeführt: $\frac{233{,}2-209{,}3}{2} = 11{,}95$.
   Interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang und in geben Sie die Einheit an!
c) Berechnen Sie, wie viel Prozent Steigerung der Fahrgastzahlen es zwischen 2010 und 2014 gegeben hat.
d) (*) Geben Sie auch die durchschnittliche jährliche prozentuelle Steigerung der Fahrgastzahlen an (mit einer Exponentialfunktion berechnet)

5) Die Flugbahn eines Baseballs kann näherungsweise durch den Graphen einer Funktion f beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



Berechnen Sie die Steigung zwischen den Punkten A und B.

6) In der nachstehenden Grafik wird der Benzinverbrauch eines Personenkraftwagens in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit dargestellt.



Der Benzinverbrauch im 1. Gang kann im Intervall [7 km/h; 40 km/h] näherungsweise durch folgende Funktionsgleichung beschrieben werden:

$$b_1(v) = \frac{3 \cdot v^2 + 10 \cdot v + 1500}{10 \cdot (v + 10)}$$

v … Geschwindigkeit in km/h
$b_1(v)$ … Benzinverbrauch bei der Geschwindigkeit v in Litern pro 100 Kilometer (L/100 km)

– Ermitteln Sie die mittlere Änderungsrate des Benzinverbrauchs für das Intervall [10 km/h; 30 km/h].
– Berechnen Sie die relative Änderung des Benzinverbrauchs in Prozent bei einer Erhöhung der Geschwindigkeit von 10 km/h auf 30 km/h.

7) Im nachstehenden Weg-Zeit-Diagramm ist der Funktionsgraph für die ersten Sekunden eines Motorradfahrers nach der Abfahrt von Jenbach dargestellt.

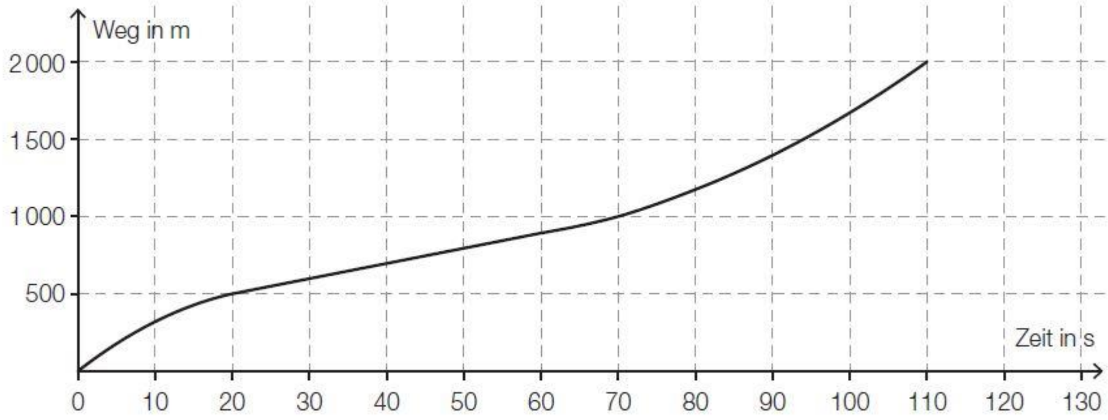
– Ermitteln Sie die mittlere Geschwindigkeit in den ersten 20 Sekunden in km/h.

8) Der PKW-Bestand ist in Österreich von 2 991 284 Fahrzeugen im Jahr 1990 auf 4 359 944 Fahrzeuge im Jahr 2009 gestiegen (Quelle: Statistik Austria, Statistisches Jahrbuch 2011).

Die Veränderung des PKW-Bestandes soll durch eine lineare Funktion modelliert werden.

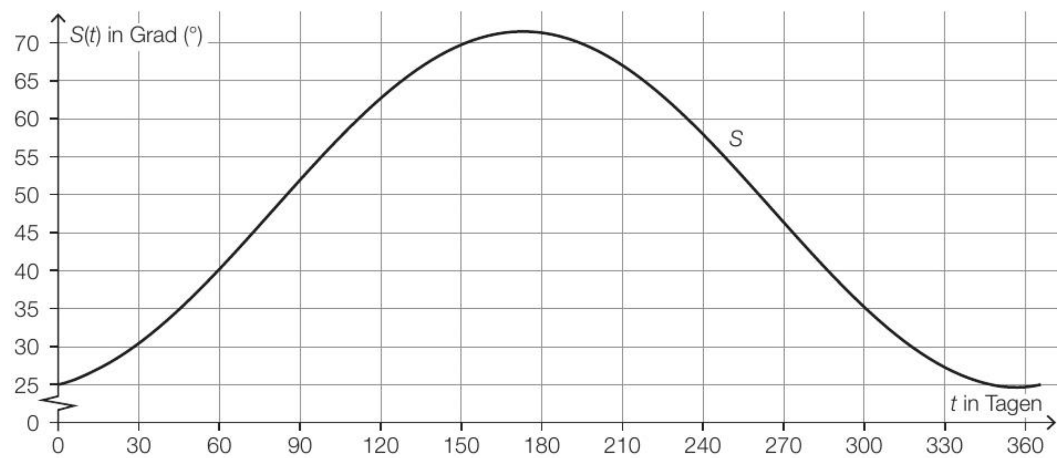
- Ermitteln Sie die mittlere Änderungsrate des PKW-Bestandes pro Jahr für den Zeitraum von 1990 bis 2009.
- Berechnen Sie, welcher PKW-Bestand im Jahr 2020 gemäß diesem Modell zu erwarten wäre.

9) b) Im nachstehenden Weg-Zeit-Diagramm ist die Fahrt eines Fahrzeuges in einem überprüften Bereich dargestellt.



- Ermitteln Sie die mittlere Geschwindigkeit des Fahrzeugs auf der ersten Weghälfte.
- Argumentieren Sie, dass die mittlere Geschwindigkeit auf der ersten Weghälfte kleiner als die mittlere Geschwindigkeit auf der zweiten Weghälfte ist.

10) a) Für jeden Tag eines Jahres wird der größte Einfallswinkel der Sonnenstrahlen betrachtet. Für eine bestimmte Stadt ist die zeitliche Entwicklung dieses Winkels als Graph der Funktion S dargestellt.



t ... Zeit ab Jahresbeginn in Tagen
$S(t)$ ... größter Einfallswinkel der Sonnenstrahlen zur Zeit t in Grad (°)

Berechnen Sie die durchschnittliche Vergrößerung des Sonnenwinkels zwischen dem 0. Und 150. Tag des Jahres und geben Sie die korrekte Einheit davon an!

Lösungen:

1) absolute Änderung: $\Delta\mathrm{H} = 6\ \mathrm{m} - 4{,}5\ \mathrm{m} = \mathbf{1{,}5\ m}$

relative Änderung: $\frac{\Delta\mathrm{H}}{\mathrm{Ho}} = \frac{1{,}5\ m}{4{,}5m}$ = 1/3 **= 33,3%**

mittlere Änderungsrate: $\frac{\Delta\mathrm{H}}{\Delta x} = \frac{6\ m - 4{,}5m}{4s - 2s}$ **= 0,75 m/s** mittlere Geschwindigkeit im Intervall [2;4] s

2) absolute Änderung: ΔR = R(9) – R(5) = $(120 \cdot 9^2 + 80 \cdot 9 + 41072) - (120 \cdot 5^2 + 80 \cdot 5 + 41072)$ =

= (51512) – (44472) = **7040 Tonnen Müllzunahme**

relative Änderung: $\frac{\Delta\mathrm{R}}{\mathrm{Ro}} = \frac{7040\ t}{44472\ t}$ = 0,1583 = **15,83%**

mittlere Änderungsrate: $\frac{\Delta\mathrm{R}}{\Delta x} = \frac{7040\ t}{9a - 5a}$ = **1760 Tonnen pro Jahr Müllzunahme**

3) mittlere Änderungsrate: $\frac{\Delta\mathrm{c}}{\Delta T} = \frac{c(35°) - c(19°)}{35° - 19°} = \frac{352\frac{m}{s} - 342{,}8\frac{m}{s}}{16°}$ = **0,5728 m/s pro Grad Celsius Zunahme der Schallgeschwindigkeit**

4) a) 25,3 Mill. Fahrgäste

b) mittlere Steigerung der Fahrgastzahlen pro Jahr im Zeitraum von 2011 bis 2013

c) ca. 12,1%

d) ca. 2,88%

5) 0,25 m/m = 25%

6) b) $\frac{b_1(30) - b_1(10)}{30 - 10} = 0{,}0875\ \frac{\text{L/100 km}}{\text{km/h}}$

$\frac{b_1(30) - b_1(10)}{b_1(10)} = 0{,}18421\ldots$

Die relative Änderung des Benzinverbrauchs bei einer Erhöhung der Geschwindigkeit von 10 km/h auf 30 km/h beträgt rund 18,42 %.

7) 7 m/s = 25,2 km/h

8) a) mittlere Änderungsrate: $\frac{4\,359\,944 - 2\,991\,284}{2009 - 1990} = 72\,034{,}7\ldots$

Der PKW-Bestand hat in Österreich durchschnittlich um 72 035 PKWs pro Jahr zugenommen.

Prognose für 2020: $4\,359\,944 + 72\,035 \cdot 11 \approx 5\,152\,329$

Der PKW-Bestand würde im Jahr 2020 rund 5,15 Mio. PKWs betragen.

9) b) $\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1\,000\ \text{m}}{70\ \text{s}} = 14{,}285\ldots\ \text{m/s} \approx 14{,}29\ \text{m/s}$

Die Fahrzeit für die erste Weghälfte beträgt 70 Sekunden. Die Fahrzeit für die zweite Weghälfte beträgt nur 40 Sekunden. Daher ist die mittlere Geschwindigkeit auf der ersten Weghälfte geringer.

10) 0,3 ° pro Tag erhöht sich der größte Einfallswinkel der Sonnenstrahlen